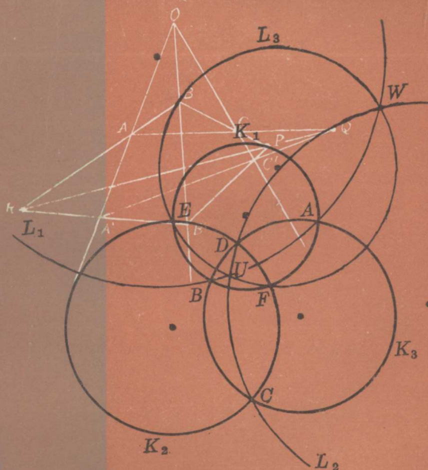
中学生文库

ZHONGXUESHENG WENKU

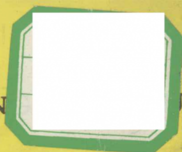
# 谈谈数学中的无限




上海教育出版社



ZHONGXUFSHEN





ISBN 7-5320-0285-3/G·232
定　价：0.72 元

中学生文库



ZHONGXUESHENG WENKU

# 谈谈数学中的无限

谷 超 豪

上 海 教 育 出 版 社

责任编辑　冯　贤
封面设计　范一辛

中学生文库　　谈谈数学中的无限
谷　超　豪

上海教育出版社出版发行
（上海永福路123号）
各地新华书店经销　　上海市印刷六厂印刷
开本787×1092　1/32　印张2.75　插页2　字数48,000
1988年8月第1版　1988年8月第1次印刷
印数1-11,000本

ISBN 7-5320-0285-3/G·232　　定价：0.72元

# 写在前面

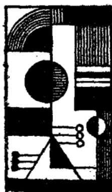
当我在小学和中学里学习数学时，有几项内容对我有很深刻的印象. 第一项是循环小数，这是我在小学三年级时所接触到的，这是我第一次遇到无限的概念. 当时我感到很新奇，居然会有永远写不完的小数，同时我也为掌握了分数和循环小数互化的算法而感到高兴. 第二项是：我在初中时，有一次听老师说，太阳离我们很远，它所射出的光线对我们来说是近似地平行的，所以平行线也可以看成为在无限远处相交的直线. 我觉得这很有道理，并且感到无限远并不是不可捉摸的，几何学和光学都很需要它. 第三项是在高中时期，我在一本数学课外书上读到，整数的全体和偶数的全体在某种意义上说是“一样多”的，这使我十分惊异，仔细一回味，对于无限来说，“一样多”这几个字实际上是另有意义的，而且是颇有道理. 第四项是在高中里学了无限级数，知道了无限项可以相加，有时会得出有限的和来，这其实是一种无限逼近的概念，有很多的妙处. 循环小数，仅仅是其中的一个非常特殊的情形. 这四项内容大大地促进了我对数学的兴趣.

在学了一些高等数学之后，我才逐步地体会到无限在数学中的重要性．我所感到兴趣的那几项内容，实际上都是高等数学中的相当根本的事项．无限小数（特别是不循环的）构成了实数理论的基础，也是形和数相统一的基础；极限即无限逼近是近代分析数学的最基本的概念，没有极限，就不能有微积分，更谈不上其它的高等数学了；而在几何学中，无限远点的引进以及对无限的不同的想象，促使几何学获得了非凡的进步，不单是数学，理论物理也受到了深刻的影响；至于整数的全体，偶数的全体这些概念，在十九世纪中发展成为集合论，而现在的纯粹数学，不管是分析，几何或代数，都是把集合作为出发点的．各种各样的集合，加上由各种各样的公理所体现出的数学结构，就成了各门纯粹数学的基础。

这样，我便有了一个想法：如何使现在中学里的同学们，对无限的概念也能发生兴趣，对它能有一些清晰的了解，又不会被复杂的计算或论证所迷惑．现在这本小书就是怀着这个目的而写的．它实际上分成了实数系、级数和极限、几何学和集合等四块，希望通过这些内容，使同学们对高等数学也能发生兴趣，在以后接触到这些内容时，由于先有了一些印象而能学得更好．我感到，学数学不仅仅是学习解题的技巧，会多解难题（这当然是必要的），而且也需要有丰富而严密的思维和想象的能力．大家从这本书里，也许可以见到一些数学概念的产生的背景和过去的数学家们的创造力与想象力，这对于提高数学能力是有好处的．

# 目 录





# 一、从循环小数说起

我最初接触到无限的概念是在小学里学除法的时候，老师要我们做以三除一，结果是永远除不尽，得到的是

$$1\div3=0.3333\cdots$$

这里的3可以一直写下去，无论写多少次，总是不能得到完全准确的答案．老师说，这是循环小数，可以写成

$$\frac{1}{3}=0.\dot{3}.$$

也就是说，设想我们可以把除法无限地进行下去，$\frac{1}{3}$这个分数也就可以表示为循环小数了．这里，就有了我们的一种想象：可以把除法手续无限地进行下去，而它也可以被认为是合理的计算，尽管作无限次的除法是不可能真正做到的．从这里可以得到一个认识：如果没有无限的概念，连最简单的分数往往也不能用小数来表示．由此可见，数学的发展是无法躲开无限这个概念的．

再稍微仔细看一下，对于一个分数$\frac{p}{q}$，这里$p$、$q$都是整

数，而且假定它们没有公因子，又 $q\neq 1$. 我们可以区分出两种情形，一种是除得尽的，这就是说它可以表示成整数或有限小数；另一种是除不尽的，这就是说，它必须用无限小数来表示. 这两种情形如何区别呢？

假使$\frac{p}{q}$属于前面一种情形，那么它就可以写作

$$\frac{p}{q}=N.a_1a_2\cdots a_s.$$

这里 $N$ 是整数，$a_1, a_2, \cdots a_s$ 是 0, 1, $\cdots$, 8 或 9, 但最后一位数 $a_s\neq 0$. 所以

$$\frac{p}{q}=\frac{N\times 10^s+a_1\times 10^{s-1}+a_2\times 10^{s-2}+\cdots+a_s}{10^s}$$

这里右边的分子表示一个整数，分母也是一个整数，它的约数只有 2, 5 以及它们的某些乘积(包括幂次)，通过约分成为$\frac{p}{q}$($p, q$ 互素)之后，就可以知道 $q$ 一定是 $2^a5^b$ 的形式，这里 $a$ 与 $b$ 都是非负整数. 相反地，如果 $q$ 取 $2^a5^b$ 这种形式，那么$\frac{p}{q}$也一定能够写成有限小数. 这件事情可以有如下的证明：

如果 $a\geqslant b$,

$$\frac{p}{q}=\frac{p}{2^a5^b}=\frac{p\times 5^{a-b}}{10^a};$$

如果 $a<b$,

$$\frac{p}{q}=\frac{p\times 2^{b-a}}{10^b}.$$

而这两个式子的右边就只能是有限小数．我们知道，一个正整数一定可以通过分解因子而写成

$$q=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_n^{a_n}$$

的形式，式中 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 是素数，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是正整数，所以只有 $n=2$，$p_1=2$，$p_2=5$ 这样两种非常特殊的情形，$\frac{p}{q}$才能够是有限小数，除此之外，所有的分数都不能表示为有限小数，而只能表示为循环小数．

为什么一定会是循环的呢？因为在这种情形做除法时，一定会有余数，并且（乘以 10 的适当幂次后）总是 1，2，…，$q-1$ 这 $q-1$ 个数中的一员，所以，再进行了 $q$ 次除法，一定会在某个时候出现相同的余数，于是小数就循环了．大家还可以注意到，这种循环不一定在除了 $q$ 次之后才出现，有时，可能出现得早些．

所以，当我们用小数来表示分数时，出现有限小数的机会是很少的．在绝大多数的情形下，我们会遇到循环小数．值得注意的是，我们明明知道循环小数是写不完的，但是我们又无法避开它们．当然我们也可以取某几位有效数字，硬把它截断（或再做一次四舍五入）成为有限小数，但这只是近似而并不是精确的表达，总有误差．从应用的观点来看，我们必须容许误差，但在建立数学的理论时，我们不能只有近似值而没有精确的数值，这是大家都能够理解的．

# 二、用尺能测量哪些长度

通常，我们总是拿尺子来测量一条线段的长度．一根理想的尺子，可以设想它有很精细的刻度，有分米，有厘米，有毫米，甚至更细一点．如果线段的长度是有限小数，我们可以认为这根尺子可以精确地量出这条线段的长度来，只要我们的这根尺有足够细的刻度．这样说已有了一定的理想化的成份，因为无论科学技术怎样进步，总有非常小的长度，依然是无法辨认的．

如果这线段的长度是一个分数$\frac{p}{q}$，它又不能表示为有限小数，那么用上述办法去测量，便成为永远测不完了．但是，在古希腊的几何学中，人们已经知道，只需用到直尺和圆规就能把一个线段分为$q$个等分．如果用这根尺的$q$等分作为一根小尺子，那么长度$\frac{p}{q}$也就可以量出来了．在这种意义上说，人们进行精确的，理想化的测量的可能性又大大地增加了．

希腊的毕达哥拉斯学派曾经相信，任何两条直线段的长度之比总是整数之比．如果事实真是这样，那么任何一个直线段的长度总可以用上面所说的那些小尺子来精确地测量了．但是，这个学派的研究否定了自己的信条．

最简单的例子是两腰等于1的等腰直角三角形斜边的长度，它应该等于$\sqrt{2}$，但$\sqrt{2}$不能是两个正整数之比，这是因为：如果$\sqrt{2}=\frac{p}{q}$，$p$、$q$是无公因子的正整数，那么就有$2q^2=p^2$．因为奇数的平方一定是奇数，从上式可见，$p$必须是偶数．设$p=2m$，$m$是正整数，从这里又可以推出$q^2=2m^2$，从此又得出$q$必须是偶数(仍然因为奇数的平方不会是偶数)．这样，$p$和$q$必须有公因子2，这就跟原来的假设发生了矛盾．从而，人们就知道存在一些直线段，它们的长度之比不是正整数的比．

于是有两种处理问题的方法．一种是避免用数来表示线段的长度，欧几里得把几何学理论化、系统化时所采取的就是这种方法．出现了可通约线段和不可通约线段的概念，可通约线段的长度之比是两个正整数之比，后来称为有理数(rational number 有人认为译为比数更恰当)．如果出现了不可通约线段的情形，希腊时代的数学家就用可通约线段的比来无限地近似它，这种无限的过程就是后来的极限过程的萌芽，我们以后要讨论它．

另一种方法是把数的概念加以推广，例如对$\sqrt{2}$，我们可以一位一位小数地计算下去，这样算下去也得到$\sqrt{2}=$

1.414…我国古代很早就会作这种计算。这种开方计算是永远不会完的(否则$\sqrt{2}$就是一个有限小数，从而是有理数了)，也不会得到循环小数(否则$\sqrt{2}$也会成为有理数的)．所以计算的"结果"是不循环的无限小数，称为无理数(irrational number，译为非比数可能更恰当)．无理数被引进之后，我们就能够用数来表示直线段的长度了．这里的数是指有理数或无理数，人们就把它们的全体总称为实数．这样，我们就可以说用无限细分的(十进制)尺子能量出任一直线段的长度来．当然，如果尺子的长度和要量的长度之比不是正整数和有限小数的话，我们要无限次地看尺子上的刻度，而且永远看不完，因为这长度是个无限小数．所以，这里又是一种对无限的想象．有了这种想象，我们就有了把实数和直线段的长度一一对应起来的原始思想了．这便构成了解析几何的最初的概念：数轴的概念．作一直线，选取一点$O$作为原点，在其右侧选一点$A$($A$不重于$O$)作为单位点，$O$点到$A$点的距离记为$|OA|$(图1)．对于$O$右




图 1

侧的一点$B$，如$O$和$B$的距离$|OB|=k|OA|$，就称B点有坐标$k$(距离$|OB|$、$|OA|$等总取正值，但$|OO|=0$)．若$B$在$O$的左侧而$|OB|=k|OA|$，则称$B$点有坐标$-k$．这样，我们不但要求直线上每点有它的坐标，而且还要求，对于

每一个实数，一定有直线上的一个点以它为坐标，这实质上是对直线所作的一个假定，同时也是解析几何的理论根据。

# 三、无限个数的相加

有限个数相加是大家都会做的．特别，如果不牵涉到无理数的情形，也就是有限个分数的相加，总是可以用有限个步骤完成的（用通分、相加、再约分的手续）．如果那些数中有无理数，那可能要复杂一些．例如，化成无限小数的相加，其步骤显然和有限小数相加相类似，但要从$\frac{1}{10}$的一位再开始做，然后，做$\frac{1}{100}$位等等，要做无限次，而且有时一个进位可以影响许多项．但无论如何，我们总认为已能进行这种运算．

现在设想无限个数的相加，例如：

(1) $1+1+1+1+\cdots$

(2) $1+2+3+4+\cdots$

(3) $0+0.3+0.03+\cdots$

这种无限个数所成的和式叫做*无限级数*，它们的最初几项的和叫做*部分和*．一般地说，一个无限级数可以写作

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$$

的形式，也可以简单地记作$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$，而由 $n$ 项所成的部分和就是

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

部分和是有限项的和，所以是完全可以做的，有的时候还可以有相当简单的表达式. 例如对前面的无限级数(1)，有 $S_n^{(1)}=n$，对(2)，有 $S_n^{(2)}=\frac{n(n+1)}{2}$，对(3)，有 $S_n^{(3)}=0.33\cdots3$($n$ 位). 就 $S_n^{(1)}$而言，当项数越取越多，即 $n$ 越取越大时，和数不仅越取越大，而且能够取到和超过任何正整数. 当 $n$ 增加时，$S_n^{(2)}$的增长更快，它当然能够超过任何正整数，所以在这两个例子中，当项数取得越来越多时，部分和会超过比你所能想象的任何大的正数. 这时，无限项的相加不能够用一个有限的、确定的数来表示它们的和.

但对于第三个例子来说，$S_n^{(3)}$显然也是随着 $n$ 而继续增大，但每添加一项，部分和的增长却越来越小，而且永远不会超过$\frac{1}{3}$. 实际上，(3)式还可以写作

$$0.3333\cdots$$

这就是一开始讲过的循环小数，我们已把它理解为$\frac{1}{3}$.

从这些例子来看，无限项作加法有时不能用一个数来表示它们的总和，有时却又能够用一个数来表示它们的总和.

为了区分这两种情形，我们必须有极限的概念. 上面所说的部分和 $S_n$ 是一个有次序的无限数列，即数 $S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$ 可以依一定的次序无限地写下去. 在情形(3)时，这个数列中的数 $S_n^{(3)}$，只要 $n$ 相当大，它能够与 $\frac{1}{3}$ 任意地接近. 举例来说，我们有

$$0<\frac{1}{3}-S_1^{(3)}<0.1=10^{-1},$$

$$0<\frac{1}{3}-S_2^{(3)}<0.01=10^{-2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0<\frac{1}{3}-S_n^{(3)}<\overbrace{0.0\cdots01}^{n}=10^{-n},$$

如果说 $10^{-100}$ 是一个很小的数，那么，当 $n>99$ 时，

$$\left|\frac{1}{3}-S_n^{(3)}\right|<10^{-100}.$$

如果对于任意小的一个正数 $\varepsilon$，那么一定会有一个 $N$，使得 $10^{-N}<\varepsilon$（比如说，$\varepsilon=0.0\cdots0731$ 这里 7 的前面有 30 个 0，要使 $\varepsilon<10^{-30}$，$N$ 就取 30）. 因此当 $n>N$ 时，$\left|\frac{1}{3}-S_n^{(3)}\right|<\varepsilon$. 在这个时候，我们就说无限数列 $S_n^{(3)}$ 当 $n$ 趋向无限时，以 $\frac{1}{3}$ 为极限，记作

$$\lim_{n\to\infty} S_n^{(3)}=\frac{1}{3}$$

更一般地说,设$S_1, S_2, S_3, \cdots, S_n, \cdots$是一个无限序列,简记为$\{S_n\}$,如果存在一个数$S$,使得$n$变得足够大时,$S_n$和$S$以任意程度接近,我们就称$S$是序列$\{S_n\}$的极限.这里有"足够大"和"任意程度接近"两句话,在现代的数学家的眼中,还是不够精确的,所以进一步的精确化的叙述应该是:对于任何一个不论是怎样小的数$\varepsilon>0$,总存在一个正数$N$,使得当$n>N$时(即$n$足够大时),不等式$|S_n-S|<\varepsilon$总能成立.因为$\varepsilon$是先任意给的小的正数(如前面例子中的$10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-100}$等等),所以后一不等式就意味着$S$和$S_n$任意接近,但在后文的多数场合中,我们并不要求有这样精确的叙述,这种叙述的好处,要从高等数学中逐步领悟出来.

当$S_n$是无限级数的部分和时,如果$\{S_n\}$的极限存在,并等于$S$,我们就说这个无限级数收敛,$S$就是这个无限级数的和.

所有(0,1)之间的无限小数,例如取

$$0.b_1b_2b_3\cdots b_n\cdots$$

可以把它写成

$$\frac{b_1}{10}+\frac{b_2}{10^2}+\cdots+\frac{b_n}{10^n}+\cdots$$

这就是一个无限级数,这里所有的$b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots$都是0,1,…,9中的一个,这时我们有$a_n=\frac{b_n}{10^n}$,因为这时

$$S_n=\frac{b_1}{10}+\cdots+\frac{b_n}{10^n}.$$

所以，如果把$S$就取为$0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$所代表的实数，那么$|S_n-S|<\frac{1}{10^{n-1}}$①，这就是说，当$n$取得足够大时，$S_n$和$S$可以任意程度地接近，即$S$为相应的无限级数的和.

这样，我们就可以看到，无限小数就是收敛的无限级数的特例.

另外一个特例是

(4) $1+r+r^2+\cdots+r^n+\cdots$ $(0<r)$

这时利用等比级数的性质(或由初等代数的公式)

$$S_n=1+r+r^2+\cdots+r^n=\frac{1-r^{n+1}}{1-r}.\text{(当}r\neq1\text{时)}$$

当$r<1$时，令$S=\frac{1}{1-r}$，我们就有

$$S-S_n=\frac{r^{n+1}}{1-r}.$$

容易看到，当$n$足够大时，可使得$\frac{r^{n+1}}{1-r}$变得任意小，所以上述的等比级数的和是$\frac{1}{1-r}$.

特别从这里看到：

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=1.$$

---

① $S-S_n=0.0\cdots0\,b_{n+1}\,b_{n+2}\cdots$，一般有$|S-S_n|<\frac{1}{10^n}$，但若$b_{n+1}=b_{n+2}=\cdots=9$时，$|S-S_n|=\frac{1}{10^n}<\frac{1}{10^{n-1}}$.

我国古书《庄子》里有这样的叙述:"一尺之棰,日取其半,万世不竭". 一根一尺长的棍子,第一天取它的1/2,第二天取它剩下的一半,共取去$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots$,庄子指出,所取去的长度永远不到1. 但这里还可以说,只要一直取下去,所剩下来的棍子的长度可以任意地小,所取去的长度之和的极限就是1.

再举一个例子,看级数:

(5) $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$

这时$a_n=\frac{1}{n(n+1)}$.

$$
\begin{aligned}
S_n&=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\\
&=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\\
&=1-\frac{1}{n+1}.
\end{aligned}
$$

从这里就容易看到,无限序列$S_n$的极限,也就是上面的级数的和是1.

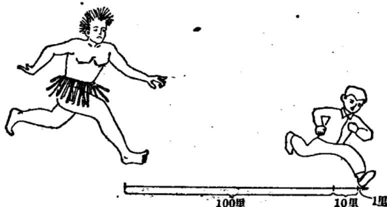
对于最初的两个例子(1)、(2)和等比级数(4)(对$r\geqslant 1$时),当$n$变大时,$S_n$可以超过任何大的正数,这时我们可以说级数发散于正无限大,或者记作

$$\lim_{n\to\infty} S_n=+\infty.$$

在数学中,$+\infty$以及$-\infty$不算是实数. 但也有个别的

书籍，把它们作为特殊的数进行运算的.

在这里，我们还想插一段话，古希腊有一位哲学家，属于诡辩学派，名叫芝诺，他提出一个疑难，他说的大概意思是：一位善跑的神，一小时能跑100里，有一个普通的人，一小时只能走10里，这个人在神的前面100公里处，他说神永远追不上那个人．为什么？因为当神去追那人时，当他跑到人的原来位置时，人已向前走了10里，当神再走到人的那个位置时，人又走了1里，神再走1里，人又走了$\frac{1}{10}$里，……无论如何，神总落在人的后面.




如果依着芝诺的思路，神所走的路是

$$100+10+1+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{10^{n}}$$

人走的路是

$$10+1+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{100^{n+1}}$$

二者之差是 $100-\frac{1}{10^{n+1}}$，始终小于100，只有当 $n \longrightarrow \infty$ 时，二者之差才是100里，才算追上，所以似乎只能说：神只能在极限的意义下追上了人.

可是计算一下时间，情况就不对了，在芝诺的思路下，计算到第 $n$ 次追的步骤，所用的时间是

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\cdots+\frac{1}{10^{n-1}}$$

小时，它小于 $\frac{100}{100-10}=\frac{10}{9}$ ①（这是正确的追上的时间），而以 $\frac{10}{9}$ 为极限（当 $n$ 无限增大时），芝诺疑难的漏洞在于把时间限制在 $\frac{10}{9}$ 小时之内，所以神追不上人，如果不限时间，神经过 $\frac{10}{9}$ 小时，就追上了人．他故意把追的过程划分为无限个步骤，使人们没有去注意时间被限制住这个事实，于是就形成了疑难.

① 此式可这样考虑：假设神在 $x$ 小时追及人，按题意有

$$100x=100+10x,$$

$$\therefore\quad x=\frac{100}{100-10}=\frac{10}{9}.$$

# 四、正项级数的“二者择一”

我们前面所举的无限级数都是正数项的，就是说它们之中的每一项都是正数，这时就有

$$S_1<S_2<S_3<\cdots<S_n<S_{n+1}<\cdots$$

从所举的例子来看，似乎只有两种情形：一种是收敛，一种是发散于正无限大，这件事是否对呢？

设想我们只许用有理数，即不承认不循环的无限小数也是数，那么这件事就不一定对，把2进行开方，就得到一个无限的，不循环的小数，它不可能和一个循环小数$k$(或有限位的小数)无限接近，因为总有某一位开始，二者是不相同的，就算是第十万位开始，二者出现了差别，那么$n>10^5$时，$|S_n-k|>10^{-(10^5)}$．$10^{-(10^5)}$的确是一个非常小的数，在应用上(至少在目前的情况)还没有任何自然科学需要有这样的准确度，但是它毕竟还是一个有确定数值的有限的数．因此，$|S_n-k|$就不能变得任意地小，它不能小于$10^{-(10^5)}$．所以，不承认无理数就会出现这样的正项无限级数，它既不发散于$+\infty$，也不收敛于一个确定的数．

引进了无理数后，这个情况就避免了．在数学中，可以采用这个事实作为确定实数性质的一条规定（或者说是一条公理）：正项级数如果不发散于$+\infty$，那么就有一个极限（它的另一说法是：单调增加的有界数列必有极限）．

有了这条规定，我们就把"承认无理数是数"这句比较含糊的话精确化了，因为每个无限小数都可以看作正项级数，而 $N.b_1b_2\cdots b_n\cdots$ 的任一部分和 $N.b_1b_2\cdots b_n<N+1$，所以不会发散于$+\infty$，因此它必须收敛于一个实数，这个实数就必须是由 $N.b_1b_2\cdots b_n\cdots$ 所确定的．另一方面，如果承认无限小数是数，我们也可以证明这个性质（但在这里就不证了）．

一个正项级数

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$$

如果是收敛的话，当 $n$ 充分大时，$a_n$ 就必须变得任意小，即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$．否则，它是不可能收敛的，但是，反过来的事实却不一定对．我们说级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n+1}+\cdots$$

是发散于$+\infty$的，初看起来，这件事似乎有点不可思议，一个人第一天走一百里路，第二天走五十里路，第三天走$\frac{100}{3}$里路，…第 $n$ 天走$\frac{100}{n}$里路，…粗粗一想，他路越走越少，一定不会走得很远的．而事实如何呢？我们得仔细估计一下：对所论的级数，我们有

$$S_2=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},$$

$$S_4=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)>\frac{3}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)>2,$$

$$S_8=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)>\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}.$$

同样，我们可知：

$$S_{16}>\frac{6}{2},$$

$$S_{32}>\frac{7}{2},$$

…………

以及一般的式子：

$$S_{2^n}>\frac{n+2}{2},$$

所以，这个人在 $2^n$ 天所走的路已超过$\frac{n}{2}\times100$里．因此，只要这个人的寿命无限，或者有无限个人和他接力，依照既定的方式走路，尽管到了第 $2^n$ 天，他也只走了$\frac{100}{2^n}$里，但是他所走的路的总和，却已超过了$\frac{n}{2}\times100$里．因此他（或他的集体）所走的路是可以超出任何距离的．

另一方面，大家还可以算一下：

$$S_1=1,$$

$$S_3=1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)<1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=2,$$

$$S_7=1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)<1+1+1=3,$$

$$S_{15}=1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{15}\right)<4,$$

……

一般地有

$$S_{2^n-1}<n \qquad (n>1)$$

从这里可以看到，他(或他的接力集体)走了 $2^n-1$ 天，还走不到 $n\times100$ 里．可以试算一下，如果他要走到5000里的地方，$2^{50}-1$ 天还不够．请估计一下，这将会是多长的时间？凭经验很难相信，他会走到任何远的地方．但这终究是可能的，尽管需要非常、非常多的时间．

我国古代关于愚公移山的故事，就包含有朴素的无限的思想，他认为太行、王屋这两座大山虽然很高大，但它们的高度和土方体积是有限的，而他的子子孙孙却是无尽的，只要坚持干下去，总能够把山移掉的．这是一个很精采的论述，说明无限是可以超出任何大的有限数的，但是这还需有一个补充，就是他的子孙们的工作效率的总和能保持一定的水准（至少是不要减少得很厉害），他的愿望才能实现．

# 五、正项级数收敛或发散的检验

要检验一个正项级数是否收敛，并不是很容易的事．但人们已经建立起许多检验的方法，它的基础是比较法．设：

(i) $\sum a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$

和

(ii) $\sum b_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots$

是两个正项级数．我们说，如果(i)收敛，又$b_n \leqslant ka_n$($n=1.2\cdots k$是一正数)成立，那么(ii)一定收敛．这因为，如记(i)的$n$项部分和是$S_n$，(ii)的$n$项部分和是$S'_n$，那么

$$S'_n \leqslant kS_n,$$

(i)收敛，所以序列$\{kS_n\}$不会发散到$+\infty$去，从而序列$\{S'_n\}$也不会发散到$+\infty$去，所以(ii)收敛。因为级数的收敛性不会因为除去(或添加)有限项而改变，所以只要从某一$N$开始，即$n \geqslant N$时，$b_n \leqslant ka_n$，从(i)的收敛就得出(ii)收敛．

这里还可以推出另外一条比较定理：设(i)收敛，

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} \leqslant \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (n=1, 2\cdots)$$①

成立，那么(ii)收敛．这是因为，从上式就能得出

$$\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} \leqslant \frac{b_n}{a_n} \leqslant \cdots \leqslant \frac{b_2}{a_2} \leqslant \frac{b_1}{a_1},$$

记$\frac{b_1}{a_1}=k$，就有 $b_n \leqslant ka_n$，从而得出(ii)收敛的结论．

我们把(i)取作等比级数，即第 12 页中的(4)

$1+r+r^2+\cdots+r^n+\cdots(0<r<1)$

来作比较，就得出：如果$\frac{b_{n+1}}{b_n}<r<1$，那么(ii)就收敛，举例来说，我们要证：

(6) $1+2r_1+3r_1^2+\cdots+nr_1^n+\cdots \quad (0<r_1<1)$

收敛．这时$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{n+1}{n}r_1$，取$N$使$\frac{N+1}{N}r_1=\left(1+\frac{1}{N}\right)r_1$ $<r<1$．这里$r$是比$r_1$大的而又小于 1 的一个已给的数．当 $n \geqslant N$ 时

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)r_1 \leqslant \left(1+\frac{1}{N}\right)r_1<r<1$$

所以级数(6)收敛．顺便还可以得出 $\lim\limits_{n\to\infty}(nr_1^n)=0$ $(0<r_1<1)$．

在这里我们还可以得出一个收敛准则，如果$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=r<1$，那么级数(ii)就收敛．因为在这时，取$n$充分大，$\frac{b_{n+1}}{b_n}$

① 这括号里的数也可以改为 $(n=N, N+1, N+2, \cdots)$，这里$N$是一个确定的正整数。

和$r$可以非常接近，$r$既然小于1，那么在$n$充分大时，$\frac{b_{n+1}}{b_n}$也就小于某一正数$r'(<1)$. 用这个方法来判断(6)的收敛性，就更方便了．因为我们很容易算出

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)r_1^{n+1}}{nr_1^n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)r_1=r_1<1$$

这种判别法称为达朗倍尔(D'Alembert)判别法.

另外一个用以作为比较的级数是:

$$(7)\quad \frac{1}{1^\alpha}+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}+\cdots\quad(\alpha>1)$$

对这个级数而言，第$(n+1)$项和第$n$项的比是:

$$\frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha},$$

它显然小于1，但$n\longrightarrow\infty$时，它的极限是1，可是不存在一个$r(r<1)$使$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha}<r<1$. 所以用上面的方法不能判定它的收敛．但我们还是可以证明它收敛．作

$$S_1=1,$$

$$S_3=1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}<1+\left(\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{2^\alpha}\right)=1+\frac{1}{2^{\alpha-1}},$$

$$S_7=1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{5^\alpha}+\frac{1}{6^\alpha}+\frac{1}{7^\alpha}$$

$$<1+\left(\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{2^\alpha}\right)+\left(\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}+\frac{1}{4^{\alpha-1}}=1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}+\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^2.$$

同理：

$$S_{15}<1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}+\frac{1}{4^{\alpha-1}}+\frac{1}{8^{\alpha-1}}$$

$$=1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}+\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^2+\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^3.$$

……

一般地有

$$S_{2^n-1}<1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}+\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^2+\cdots$$

$$+\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^{n-1}<\frac{1}{1-\frac{1}{2^{\alpha-1}}}.\quad (n>1)$$

(因为当 $\alpha>1$ 时，$\frac{1}{2^{\alpha-1}}<1$)。从而可见，所有的部份和 $S_m$ 都小于一个定数，所以这个级数不是发散于 $+\infty$ 的，因而是收敛的．此外，我们已经知道，如(7)中的 $\alpha=1$，它就成为发散的．

如果(i)是发散级数，则用它也可以作出一些判别级数发散的准则，我们可以概括起来说：如果成立下列条件之一，级数(ii)就是发散的：

i) $b_n\geqslant ka_n$,

ii) $\frac{b_{n+1}}{b_n}\geqslant\frac{a_{n+1}}{a_n}$,

iii) $\frac{b_{n+1}}{b_n}\geqslant 1$，或 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=k\geqslant 1$.

它们的证明和上面的论述相仿. 举一个例子, 考察级数

$$1+1\cdot r+(1\cdot 2)r^2+\cdots+(n!)r^n+\cdots$$

这时,

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{(n!)r^n}{((n-1)!)r^{n-1}}=nr.$$

当 $r>0$ 时, 只要 $n$ 充分大, $nr>1$, 因而级数是发散的.

从此很容易得出

$$\frac{1}{1^a}+\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}+\cdots+\frac{1}{n^a}+\cdots \quad (0<a<1)$$

是发散的, 因为这时,

$$\frac{1}{n^a}>\frac{1}{n}.$$

而

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

已知是发散的.

# 六、发散快慢的比较

我们已经说过，一个无限数列$\{a_n\}$，如果是单调增加，又不收敛，那么它一定发散于$+\infty$.

同样是发散于$+\infty$的单调增加数列，发散也有快慢之分.

我们试就下面的一些无限数列来比较它们的发散快慢.

$\{n\}$ 即 $1, 2, 3, \cdots n, \cdots$

$\{n^a\}$ 即 $1, 2^a, 3^a, \cdots n^a, \cdots$ $(a>0)$

$(r^n)$ 即 $r, r^2, r^3, r^n\cdots$ $(r>1)$

$\{n!\}$ 即 $1!, 2!, 3!, \cdots n!, \cdots$

一般说来，如果有两个发散于$+\infty$的数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$，如果$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=+\infty$，我们就说数列$\{a_n\}$发散比$\{b_n\}$快，或$\{b_n\}$发散比$\{a_n\}$慢.

先看序列$\{n^\alpha\}$和序列$\{n^\beta\}$，$\dfrac{n^\alpha}{n^\beta}=n^{\alpha-\beta}$，当$\alpha>\beta$时，

$\alpha-\beta>0$, 当 $n$ 无限增加时, $n^{\alpha-\beta}$ 也无限增加, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha-\beta}=+\infty$. 所以对序列 $\{n^\alpha\}$ 而言, $\alpha$ 越大, 则发散越快, 特别当 $\alpha>1$ 时, $\{n^\alpha\}$ 比 $\{n\}$ 发散得快, 当 $0<\alpha<1$ 时, $\{n^\alpha\}$ 比 $\{n\}$ 发散得慢.

再看数列 $\{n^\alpha\}$ 和 $\{r^n\}$. 我们作一无限级数

$$\frac{1}{r}+\frac{2^\alpha}{r^2}+\cdots+\frac{n^\alpha}{r^n}+\cdots$$

把这个级数的一般项记为 $a_n$, 那么 $a_n=n^\alpha r^{-n}$, 而

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha r}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha \frac{1}{r},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha \frac{1}{r}=\frac{1}{r}<1.$$

根据上一节无限级数收敛性的判别法, 知道无限级数 $\sum a_n$ 是收敛的, 因此有

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{r^n}=0,$$

或

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{n^\alpha}=+\infty.$$

所以数列 $\{r^n\}$ 发散比 $\{n^\alpha\}$ 快. 有趣的是不论 $\alpha$ 如何大, 比如说 $\alpha=1000$, 也不论 $r$ 和 1 如何接近, 比如说 $r=1.001$, 仍然有这个事实. 这种趋势在最初许多项未必能够看出来, 而是需要用这种分析的手段才能辨别清楚.

再看数列 $\{r_1^n\}$ 和 $\{r_2^n\}$ $(r_2>r_1>1)$, 这时

$$\frac{r_2^n}{r_1^n}=\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n,$$

当 $n\to\infty$ 时，它是发散于 $+\infty$ 的．所以对数列 $\{r^n\}(r>1)$ 而言，$r$ 越大，发散越快，这是很自然地可以理解的．

最后，再比较 $\{r^n\}$ 和 $\{n!\}$，我们考察数列 $\left\{\frac{n!}{r^n}\right\}$，把 $\frac{n!}{r^n}$ 记为 $\beta_n$，我们有

$$\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}=\frac{(n+1)!}{n!}\cdot\frac{r^n}{r^{n+1}}=\frac{n+1}{r}.$$

当 $n\geqslant r$ 时，$\beta_{n+1}>\beta_n$，所以除了有限项之外，$\{\beta_n\}$ 是单调增加的，当 $n\geqslant 2r$ 时，$\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}\geqslant 2$，因此取 $n_0$ 为大于 $2r$ 的一个整数，我们有

$$\beta_{n_0+1}\geqslant 2\beta_{n_0},\ \beta_{n_0+2}\geqslant 4\beta_{n_0},\ \cdots,\ \beta_{n_0+k}\geqslant 2^k\beta_{n_0},$$

所以当 $k\to\infty$ 时 $\beta_{n_0+k}$ 发散于 $+\infty$，也就是说：$\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=+\infty$．因此 $\{n!\}$ 比 $\{r^n\}$ 发散得快，不管 $r$ 取多大，都是如此．

在所举的四种例子中，$\{n!\}$ 的发散最快，当然，我们还可以举出发散更快的数列．其实，每一个发散的数列 $\{a_n\}$ 都有一个比它发散更快的数列 $\{b_n\}$，比如说，把 $b_n$ 取作

$$b_n=a_n^2,$$

那么，

$$\frac{b_n}{a_n}=a_n,$$

当 $n\to\infty$ 时，$\frac{b_n}{a_n}$ 发散于 $+\infty$，所以 $\{b_n\}$ 比 $\{a_n\}$ 发散得快．

同样地，若令

$$c_n=a_n^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{a_n}{c_n}=a_n^{\frac{1}{2}},$$

当 $n\to\infty$ 时，$\frac{a_n}{c_n}$发散于$+\infty$，所以数列 $\{c_n\}$ 发散比 $\{a_n\}$ 慢，由此可见，数列发散于$+\infty$的快慢的程度都是无止境的，快的，也一定有更快的；慢的，也一定有更慢的.

估计数列发散的快慢，有很多应用价值，例如在用计算机解决一类问题时，需要做多少次运算就是一个很重要的问题.

假使我们要做 $n$ 个人的年龄的平均，如果用最原始的方法去做，需要做 $n-1$ 次加法和一次除法，所以计算次数是 $n$ 次，$n$ 变成$(n+1)$，计算次数只增加一次，$n$ 增加一倍，计算次数也增加一倍，这种计算（例如 $n$ 大得不可思议）用计算机来完成不大会有困难，这时计算次数 $N(n)=n$.

如果有一 $n\times n$ 格子，每个格子里有一个数，要作这些数的平均数，用最原始的方法做，计算次数就是$N(n)=n^2$，当 $n$ 增大1，计算数要增加$2n+1$，$N(n+1)=N(n)+2n+1$，它已经增加得比较快了，但在实用上还不会造成过大的困难.

如果有一类问题，其计算次数是$N(n)=2^n$，当$n$变为$n+1$时，计算数 $N(n+1)=2^{n+1}=2N(n)$，要增加一倍，这样，如果$n$增加 4，计算量就得变成 16 倍，$n$增加 5，计算量就变成 32 倍，如果 $n$ 从 10 变到 20，计算量就得变成 $2^{10}$倍，这样增长下去，最先进的大型计算机（加上很快的计算速度）也无法承受. 一般说来，如果一个问题的计算数 $N(n)$是

$n$ 的多项式和计算数 $N(n)$是 2 的 $n$ 次幂，其间有极大的差别，对后者来说，$n$ 较大时，计算几乎就是不可能的．所以理论计算机科学中的一个主要问题是，对于一个确定的问题，要构造出 $N(n)$ 尽可能小的算法．如果它是 $n$ 的多项式，那么实用上一般可以接受，如果它的发散速度快于多项式，那么用计算机计算($n$ 比较大时)就几乎不可能实施了．这种对计算量的估算，成为数学和计算机科学中的一个主要问题，称为计算复杂性问题．它提示我们，从实质上来减少计算次数(如果可能的话)与计算机的更新换代相比有时是同样地重要的．

# 七、变号的无限级数

一个无限级数可以既有负数的项也有正数的项，最简单的例子有:

(i) $1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots$

(ii) $1-2+3-4+\cdots+(-1)^{n-1}n+\cdots$

(iii) $1+r+r^2+\cdots+r^n+\cdots \qquad (r<0)$

(iv) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$

这几个级数的情形很不相同. 对于级数(i)来说，部分和:

$$S_n=1(\text{当 } n \text{ 是奇数时});$$

$$S_n=0(\text{当 } n \text{ 是偶数时}).$$

所以 $S_n$ 在1和0之间跳动，不会收敛于一个确定的数，但也不会发散于$+\infty$.

对级数(ii)，我们可以作出它的部分和，当 $n$ 是偶数 $2m$ 时,

$$S_{2m}=1-2+3-4+\cdots+(2m-1)-2m$$
$$=\underbrace{-1-1-1-\cdots-1}_{m\text{次}}$$
$$=-m;$$

当 $n$ 是奇数 $2m+1$ 时,

$$S_{2m+1}=S_{2m}+(2m+1)=m+1.$$

所以它的部分和在 $-m$ 和 $m+1$ 之间跳动, $m$ 越大, 跳动的幅度越大, 所以它既不收敛, 也不发散于 $+\infty$(或 $-\infty$).

对于级数(iii)来说,

$$S_n=\frac{1-r^{n+1}}{1-r}\quad(r<0)$$

当 $|r|<1$ 时, $n$ 增大时, $r^n$ 和 0 无限接近, 级数收敛, 其和是 $\frac{1}{1-r}$. 这里 $S_n$ 也是跳动的, 不过幅度越来越小罢了. 当 $|r|>1$ 时,

$$S_n=\frac{1-|r|^n}{1+|r|}\ (\text{当 } n \text{ 是偶数时});$$

$$S_n=\frac{1+|r|^n}{1+|r|}\ (\text{当 } n \text{ 是奇数时}).$$

它也是跳动的, 跳动的幅度越来越大, 它既不收敛, 也不发散于 $+\infty$(或 $-\infty$). 当 $r=-1$ 时, 它就是级数(i).

通常, 不收敛的级数, 就称为发散级数. 但从上面的例子可以见到, 对于既有正项又有负项的无限级数来说, 发散级数不一定发散于 $+\infty$(或 $-\infty$).

再来看级数(iv), 我们从

$$1-\frac{1}{2}>0, \frac{1}{3}-\frac{1}{4}>0, \cdots \frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}>0, \cdots$$

可以看到：

$$S_2<S_4<S_6<\cdots<S_{2n}<\cdots$$

又从

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}<0, -\frac{1}{4}+\frac{1}{5}<0, \cdots -\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}<0, \cdots$$

可以看到：

$$S_1>S_3>S_5>\cdots>S_{2n-1}>\cdots$$

此外，因为

$$S_{2n+1}=S_{2n}+\frac{1}{2n+1},$$

$$S_{2n+3}=S_{2n}+\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\right)+\frac{1}{2n+3},$$

$$S_{2n+5}=S_{2n}+\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+4}\right)+\frac{1}{2n+5},$$

……

可以看到，对任何 $m>n$，

$$S_{2m-1}>S_{2n},$$

此外，如果 $m_1<m$，已经看到

$$S_{2m_1-1}>S_{2m-1},$$

所以任何一个奇数项的部分和总大于任何一个偶数项的部分和。从上面的论述，我们便看到

$$S_1>S_3>\cdots>S_{2n-1}>\cdots>S_{2n}>\cdots>S_2.$$

这样，我们就见到偶数项的部分和 $S_{2n}$ 构成一个单调上升的无限数列，其中每一数都小于 $S_1$，因此这个无限数列是单调上升，而且不发散于 $+\infty$，所以一定有一个极限，记做 $S^-$. 另外一面，级数 (iv) 的奇数项的部分和 $S_{2n-1}$，组成一个单调下降的无限序列，它的每一项都大于 0，所以它不会发散到 $-\infty$，而是收敛于一个确定的数 $S^+$. 很明显，$S^+\geqslant S^-$.

我们说 $S^-$ 和 $S^+$ 必须相等. 这因为，由

$$S_{2n+1}-S_{2n}=\frac{1}{2n+1},$$

可见，当 $n$ 变得足够大时，它们之差是可以任意小的，但 $n$ 充分大时 $S_{2n}$ 和 $S^-$ 会无限接近，$S_{2n+1}$ 会和 $S^+$ 无限接近，所以 $S^+$ 和 $S^-$ 不可能是两个不同的实数，而是同一实数，即 $S^-=S^+=S$，因而当 $n$ 足够大时，$S_n$ 和 $S$ 可任意接近，所以(iv)是一个收敛的级数.

例(iv)实际上可以推广到下面的一般情形：设无限数列 $a_n>0$ 为单调减少

$$a_1>a_2>a_3>\cdots>a_n>a_{n+1}>\cdots$$

而且

$$\lim_{n\to\infty} a_n=0.$$

那么级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6+\cdots$$

一定收敛.

这是由德国数学家莱布尼茨(Leibniz)所发现的,称为**交错级数的莱布尼茨收敛定理**. 这里"交错"两字是指级数各项是正负交错的。它的证明事实上和级数(iv)的收敛性证明完全一样,只需要作如下的改变:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & & \frac{1}{n} & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & & a_n & \end{array}$$

就可以了.

对于级数(iv),我们还可以注意到,如果把各项取绝对值,就成为:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots,$$

前面已看到过,这就是一个发散的级数. 这种本身收敛,但各项取绝对值后却发散的级数称为**条件收敛的级数**.

# 八、无限项求和的次序问题

我们仍然从上一节的级数(iv)，即无限级数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\cdots$$

说起.

这个级数，可以把它各项的次序重新排列一下，得到下面的级数

$$\text{(v)}\quad 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}+\cdots$$

(v) 和 (iv) 是由完全相同的无限个项组成的. 任何一项 $(-1)^{n-1}\frac{1}{n}(n=1,2,3,\cdots)$在 (iv) 中和在 (v) 中都出现一次，而且只有一次. 我们把(iv)的和记作 $S$，粗粗一想，(v) 的和也会是 $S$，但事实却并非如此. 我们看到：

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right),$$

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right),$$

......

$$\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right),$$

......

和级数(iv)比较一下，我们就能够明显地看出来，(v)的$3n$项的部分和$S'_{3n}$等于(iv)的$2n$项的部分和$S_{2n}$的$\frac{1}{2}$，当$n$无限增大时，$S_{2n}$和$S$无限接近，所以$S'_{3n}$和$\frac{S}{2}$无限接近．由于

$$S'_{3n+1}=S'_{3n}+\frac{1}{2n+1},$$

$$S'_{3n+2}=S'_{3n}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{4n+2}=S'_{3n}+\frac{1}{4n+2}$$

(这里$S'_{3n+1}$，$S'_{3n+2}$记级数(v)的$3n+1$项和$3n+2$项的部分和)，所以，$n$无限增大时，$S'_{3n+1}$，$S'_{3n+2}$也和$\frac{S}{2}$无限接近．这样我们就得出了一个使人感到惊奇的结论：无限级数(v)的和是无限级数(iv)的和的一半，尽管进入级数的项是完全一样的，它们之间的差别只是排列次序不同而已！所以对于级数无限项的相加，次序是不能随便改变的．采取不同的次序可以得出不同的和！

更令人惊异的是，我们可以把无限级数(iv)改变次序，使它的和成为任何预先给定的实数．比如说，我们想改变

(iv)的次序，使改变次序后的级数的和是100. 现在来证明这件事.

把(iv)中所有的正项取来，得到级数

$$\text{(vi)}\qquad 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$$

又把(iv)中所有的负项取来，改变符号，得到级数

$$\text{(vii)}\qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots$$

和我们讨论过的发散于$+\infty$的级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

相比，(vii)的每项是这级数的$\frac{1}{2}$，所以正项级数(vii)必须发散于$+\infty$. 又把(vi)和(vii)相比，正项级数(vi)的每项都比(vii)的对应项大，所以(vi)也是发散的.

现在先把(vi)中取足够多的项，使它们的和正好超过100，这总是可能的，因为(vi)是发散于$+\infty$的（请大家注意"正好"这两个字，它意味着如果少取了一项，其和就不会超过100）. 再取(vii)的第一项的变号（它是级数(iv)中的第二项），添入在制作中的级数中去，其和式就会少于100，再从(vi)中开始依次取那些未取到的项，加入制作中的新的级数中去，一直取到部分和又正好超过100（这也是可能的，因为(vi)除去有限项之外，仍然发散于$+\infty$），然后再添上(vii)的第二项变一符号（它属于(v)），其和又小于100，再利用(vi)的项，使制作中的级数的和超过100，又利用

(vii)的项，使其和低于100，这个步骤可继续进行下去，而且是永远不会中断的，(vi)的每一个指定的项$\frac{1}{2n+1}$(不管$n$多大)都会被取到，而且(vii)的每一个指定的项$\frac{1}{2m}$(不管$m$多大)也会被取到，所以所得到的级数的确是(v)改变次序后得到的，没有任何一项被漏掉．假使说我们用到了(vi)中的$\frac{1}{2m+1}$构成了新制作的级数的第$N$项，而其部分和刚好超过100，而接着又采用了(vii)中的项$\frac{1}{2l}$的变号作为新的级数的第$N+1$项，那么从做法可以看出，在第N项以后的任何一个部分和，和100相差的绝对值，不会超过$\frac{1}{2l}$，这因为，在这个例子中，我们总有$2l<2m+1$，所以$\frac{1}{2l}>\frac{1}{2m+1}$，而以后的部分和不会超过$100+\frac{1}{2m+1}$(因为(vi)中后来取的项要比$\frac{1}{2m+1}$小)，也不会小于$100-\frac{1}{2l}$(因为(vii)中后来取的项总大于$\frac{1}{2l}$)，所以$n>N$时，$|S_n-100|<\frac{1}{2l}$，这里$S_n$指新制作的级数的$n$项的部分和．这个事实表明，当$n$取得足够大时，新制作的级数的部分和和100可以任意接近，这就是说，新制作的级数的和正好是100.

这个作法的主要思想是把(v)中的正项取来，得到一

个发散于$+\infty$的级数，但它的一般项的极限却是0. 又把(v)的所有负项取来(是(vii)的变号)构成一个发散于$-\infty$的级数，它的一般项的极限也是0. 取(vi)中足够多的项，使其和正好超过100，又取第二级数的若干项(这时是一项)使其和又正好减至100以下，再用第一级数的项，使其和增加到正好超过100，又取第二级数的项，使其和正好减至100以下，又利用这两个级数的项当$n$无限增大时都趋向于0的事实，就可以得知此制作的级数一定收敛于100. 注意，这里的100只不过是一个例子，完全可以换成另外的任何实数，证明方法完全是一样的（如果这个实数是负数，那么我们就得先利用第二级数的项，然后取第一级数的项).

对于这个作法，我们可以打个比喻，假设国家手中有足够的大米，又有足够的货币，就可以使粮价稳定在一个指定的水平. 如果粮价太低了，国家就逐步提高价格来收购，使它的价格回升，升到了超过这个指定的水平后，又采取抛售的办法，使粮价跌到指定水平以下. 这样就能基本上保持在指定的水平上.

用上面这个办法，也可以变更(v)中项的次序，使它发散于$+\infty$. 我们设想1, 2, 3, 4, 5, …这样一个发散于$+\infty$的序列，取(vi)的若干项，使其和正好超过2，添上(vii)的若干项的变号，使其和正好降到2以下，又添上(vi)的若干项，使其和又增长到正好超过了，再取(vii)的若干项的变号，使其和又降至3以下，又取(vi)的若干项，使其和再超

过4,…如此继续进行,(v)的每一项仍然能够取到,这样,我们就能改变级数(v)的次序,使新制作的级数变为发散于$+\infty$.

上述非常有趣的结果是德国著名的数学家黎曼(Riemann)所发现的,称为*黎曼更序定理*.他的定理不仅是对这个特例做的,而是对任何一个条件收敛的级数(请回顾第六节最后所给出的定义),而加以证明的.他的证明方法和我们这里的叙述没有什么实质上的不同.

所说的事实表明,对于无限个数的求和,次序是十分重要的,次序取得不同,结果就可能完全不一样.

为了使大家再次认识到有限和无限的不同,再举一个例子.

大家知道,把$N^2$个数排成一个方形,先把每行(横)相加,再把所得的和数相加,所得的数就是这$N^2$个数的总和.这个总和也可以用另外的方法求得,先把每列(竖)相加,再把和数相加,所得的数也是总和.所以这两种加法的结果是相等的.例如下图所示:

$$\begin{matrix}1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{matrix}$$

先加横行的，得到 0，0，0，0，0，1，然后相加，得到 1．先加竖行（数学上习惯称为列）的，得到 1，0，0，0，0，0，然后相加，也得到 1．

现在我们把它扩充到无限个数的情形，例如：

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots \\ \cdots\cdots \end{matrix}$$

这时，每一横行都有一个 1 和一个 −1，因而相加的结果都是 0，从而再相加，结果当然也是 0．另一方面，除第一列只有一个 1 以外，其它的各列都有一个 −1 和一个 1（第 7 列的 +1 在第 7 行，未写出），所以各列的和是 1，0，0，0，…再相加，所得到的结果却是 1，因而按不同的方式作加法却得到不同的结果！

因此，对于有限个数的加法的运算法则，不能无条件地运用到无限中去．

# 九、无限项求和的次序问题(续)

无限项求和，虽然在许多情况下是不可以交换次序的，但是，也有许多情况是可以交换次序的.

首先，我们要说正项级数经过任意交换次序后，如原来级数收敛，那么新的级数也收敛，其和相同，如果原来的级数发散于$+\infty$，那么更序后的级数也发散于$+\infty$.

现在要证明这个事实. 假设:

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$$

是一个正项级数，

$$b_1+b_2+\cdots+b_n+\cdots$$

是前者的更序级数，其意义是每一个 $b_i(i=1,2,\cdots n,\cdots)$ 总是某一个 $a_j$，并且所有的 $a_j$ 都会在下一级数中出现，且只出现一次. 把前一级数的 $n$ 项的部分和记为 $S_n$，后一级数的 $n$ 项的部分和记为 $S'_n$.

考察 $S'_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$

它们实际上是某些 $a_j$ 的和式，假设其中所出现的下标最大的 $a_j$ 是 $j=m_n$. 这样，显然就有:

$$S'_n \leqslant S_{m_n}$$

当 $n$ 取得非常大时，$m \geqslant n$，当然也是非常大的.

假如前一级数收敛，$S_{m_n}$ 会与级数的和 $S$ 无限接近，这样 $S'_n$ 不能发散到 $+\infty$，第二级数的和如为 $S'$，那么就有：

$$S' \leqslant S.$$

另一方面前一级数也可以看成后一级数的更序级数，根据同样的理由，

$$S \leqslant S'$$

成立．这样，我们就只能有 $S=S'$．因此这两个级数如果有一个收敛，另一个必定收敛，且其和相等．因为正项级数收敛和发散到 $+\infty$，这二者必取其一，如果有一个发散到 $+\infty$，那么另一个也必须发散到 $+\infty$.

其次，我们再看如下的情形：如果一个级数

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$$

是既有正项又有负项的，而且正项的个数和负项的个数都是无限的，抽出其所有正项，得到一个正项无限级数

$$(+)\quad a'_1+a'_n+\cdots+a'_n+\cdots$$

又抽出其所有负项，得到一个负项的无限级数

$$(-)\quad a''_1+a''_2+\cdots+a''_n+\cdots$$

现在假定(+)、(−)都是收敛级数，它们的和分别记成 $S^{(+)}$ 和 $S^{(-)}$．成立下面的事实：

$$S_n=S^{(+)}_{n1}+S^{(-)}_{n2}$$

$S^{(+)}_{n1}$ 是级数 (+) 的部分和，项数 $n_1$ 为 $S_n$ 中正项的数目. $S^{(-)}_{n2}$ 是级数(−)的部分和，项数 $n_2$ 为 $S_n$ 中负项的数目．当

$n$变得很大时，$n_1$和$n_2$也必须变得很大，所以$S^{(+)}_{n1}$和$S^{(-)}_{n2}$与$S^{(+)}$和$S^{(-)}$无限接近，$S_n$与$S^{(+)}+S^{(-)}$无限接近，所以所说的级数收敛，而且和就是$S^{(+)}+S^{(-)}$.

如果把级数变更次序，(+)和(−)也相应地改变了次序，但(+)是正项级数，(−)是负项级数，交换次序不会改变它们的收敛性，也不会改变它们的和，所以把原级数更序也不会改变它的收敛性和它的和.

这里，我们在级数(+)和(−)都收敛的条件下，证明了级数的收敛性和和不会因更序而改变.

(+)和(−)都收敛等价于级数

$$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|+\cdots$$

收敛，这个级数的各项是原来级数各项的绝对值，是个正项级数，满足这种条件的级数叫做**绝对收敛级数**. 因而，我们所得到的结论是：绝对收敛的级数在更序后不改变其收敛性也不改变其和.

和的交换次序问题在数学分析中是一个十分重要的内容，在这里，我们仅通过一些最简单的例子的讨论，使大家看到无限的复杂性.

# 十、射影几何中的无限远点

大家知道，在几何中有一条著名的公理：在平面上过一点存在一条，而且只存在一条直线和已给的直线不相交，这是著名的欧几里德平行公理.

前面已讲过，在解析几何中，我们把直线上的点和实数相一一对应. 因为$+\infty$，$-\infty$都不是实数，所以在欧几里德几何学中，没有以$+\infty$或$-\infty$为坐标的点.

可是，在几何学中却出现了无限远点. 设想平面上有两条相交的直线$l_1$和$l_2$(图 2)，交点为$O$，在$l_1$上有一动点

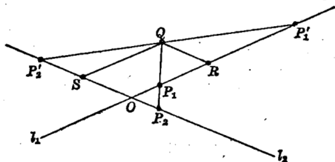



图 2

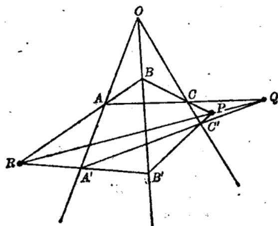
$P_1$，取平面上 $l_1$，$l_2$ 以外的一点 $Q$，连结 $QP_1$ 和 $l_2$ 交于一点 $P_2$，当 $P_1$ 在 $l_1$ 上运动时，$P_2$ 就随着在 $l_2$ 上运动，好象是从 $Q$ 照出的灯光，把 $P_1$ 的影子照到 $l_2$ 上．这种对应叫做透视或者叫做射影对应．

当 $P_1$ 如图 2 所示的位置向右移动时，$P_2$ 也向右运动，设 $R$ 是 $l_1$ 上的一点，使 $QR$ 和 $l_2$ 平行．当 $P_1$ 移近 $R$ 时，$P_2$ 在 $l_2$ 上向右越走越远，当 $P_1$ 取到 $R$ 时，$QR$ 就和 $l_2$ 没有交点，那就是说 $P_1$ 的影子消失了．当 $P_1$ 越过了 $R$ 继续向左移动，例如取到了 $P'_1$ 的位置，这时 $P'_1Q$ 和 $l_2$ 的交点移到 $P'_2$ 的位置，$P'_1$ 从右边离 $R$ 越近，$P'_2$ 就在 $l_2$ 上左边越远之处。如果设想，两条平行直线 $QR$ 和 $l_2$ 在一个假想的点——无限远点相交，那么 $R$ 的影子就是那个无限远点，而且应该设想，$l_2$ 上向左去的无限远点和向右去的无限远点实际上是一个点，因为它是同一点 $R$ 的"影子"．设 $S$ 是 $l_2$ 上一点，$QS$ 平行于 $l_1$，当 $P'_1$ 向右无限远移时，$P'_2$ 可以无限移近 $S$，但是，如果不在 $l_1$ 上引进无限远点的话，$S$ 点就不会成为 $l_1$ 上的点的"影子"．引进了 $l_1$ 上的无限远点，$S$ 就成为这个无限远点的"影子"了．这样引进了直线上的无限远点以后，从 $Q$ 点作直线 $l_1$ 和 $l_2$ 上点的射影对应，就能够使 $l_1$ 上每一点有 $l_2$ 上的一个对应点，特别点 $R$ 对应于 $l_2$ 上的无限远点，又 $l_2$ 上的点 $S$ 是 $l_1$ 上的无限远点所对应的点．

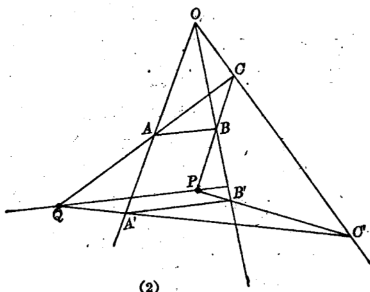
把平面上的直线添上无限远点时，假想平行的直线具有相同的无限远点，又把无限远点的全体看成一条无限远直线，这样构成的平面叫做射影平面．在射影平面上，两条

不同的直线一定有一个交点，而且只有一个交点．如果两条直线都不是无限远直线，又不平行，那么交点是有限处的点；如果两条直线都不是无限远直线，但是相互平行，那么它们就有一个交点，它是这两条直线所共有的无限远点．无限远直线和非无限远直线也有一个交点，这就是那条非无限远直线上的无限远点．

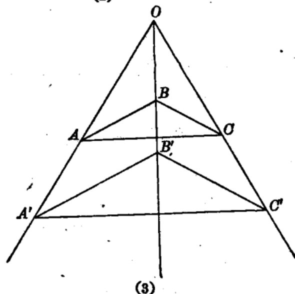
运用了无限远点，有些著名定理的叙述就简单得多了，比如说，有如下的一个定理(称为德沙格定理)：设 $ABC$ 和 $A'B'C'$ 是平面上的两个三角形，设对应的顶点的连线 $AA'$，$BB'$，$CC'$ 通过同一点 $O$，那么对应边 $AB$ 和 $A'B'$ 的交点 $R$，$BC$ 和 $B'C'$ 的交点 $P$，$CA$ 和 $C'A'$ 的交点 $Q$ 共线．我们不去证明这个定理了，但可以请大家作一些实例来试验一下．如果不用无限远点的概念，这个定理的结论便有三种情形：(i)三对对应边在有限处相交［图 3(1)］；(ii)一对对应边



(1)



(2)



(3)

图 3

$AB$ 和 $A'B'$ 平行，$BC$ 和 $B'C'$，$CA$ 和 $C'A'$ 相交于有限处的点 $P$，$Q$，那么就会有 $PQ$ 和 $AB$、$A'B'$ 平行[图 3(2)]；(iii)有两对对应边互相平行，$AB$、$A'B'$ 平行，又 $BC$、$B'C'$ 平行，那么 $CA$、$C'A'$ 平行[图 3(3)]. 因为第(ii)种情形相

当于$R$是个无限远点，它是$AB$和$A'B'$的公共的无限远点，$PQR$共线就意味着$PQ$也过这个无限远点，即$PQ \parallel AB \parallel A'B'$. 情形(iii)意味着$R$、$P$都是无限远点，$Q$和$R$、$P$共线，就意味着$Q$是一个无限远点，即$CA$和$C'A'$平行. 有了无限远点的概念，这三种情形便完全统一起来，就有上述简单、明了的形式.

无限远点的引入，对于建立在几何学的发展上有重要意义的射影几何学起了关键的作用.

# 十一、反演变换下的无限远点

在欧氏几何学中，还有一种重要的变换，叫做反演．假设$O$是平面内一个圆$C$的圆心，半径为$r$，$P$是平面内的任意一点，暂设$P$不是点$O$，作射线$OP$，在这射线上取一点$P'$，使得$OP$的长度$|OP|$和$OP'$的长度$|OP'|$满足

$$|OP|\cdot|OP'_{2}|=r^2,$$

从$P$到$P'$的变换称为关于圆$C$的反演，$P'$称为$P$关于圆$C$的反演点．

反演有哪些重要的性质呢？从$|OP|\cdot|OP'|=r^2$可以直接看出下面一些性质．

(1) 设$P$是圆$C$内的点，那么$P'$是圆$C$外的点，如果$P$是圆$C$外的点，那么点$P'$是圆$C$内的点(图 4)．

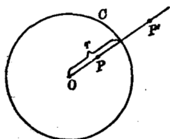



图 4

(2) 设$P'$是$P$的反演点，那么$P'$的反演点就是$P$(关于同一圆$C$)．

(3) 圆$C$上的点关于反演

不变.

(4) 当$P$沿着固定的射线向$O$移近时，它的反演点$P'$沿着同一射线越移越远，只要$P$和$O$充分接近，$P'$就可以移到距$O$任意远的地方.

按定义，$C$的圆心$O$没有反演点，也没有点以$O$为反演的点，和前一节相类似，我们可以引进一个假想的无限远点$P_\infty$，使它成为$O$的反演点. 但现在有一个重要的不同之处. 因为$O$只是一个点，所以从不同射线上得到的无限远点只能认为是同一的，因而在考虑反演变换时，平面上可以添上无限远点，但只能是一个无限远点，这种平面称为共形平面，它和射影平面不同之处是它只有一个无限远点.

大家或许会奇怪，一个平面为什么可以用不同的方式添上无限远点，在射影平面上无限远点构成一条直线，在共形平面上，却只有一无限远点？其原因可以解释如下：无限远点是一种假想的点，我们可以根据各种理论发展的需要而设计各种不同的无限远结构.

为了理解对共形平面的这种设计，我们再讨论反演变换的一些性质：

(5) 在反演变换下，过$O$点的圆变为直线(图 5).

设$K$是过$O$点的一圆，半径为$a$，圆心在$B$点，$OBE$是$K$的一条直径，$P$是圆$K$上的一个动点，设$\angle POB=\theta$，那么

$$|OP|\sec\theta=|OE|,$$

这是因为$\angle OPE$是直角. $P'$在射线$OP$上. 根据定义,

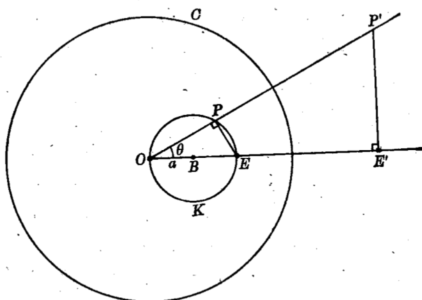



图 5

$$|OP'| = \frac{r^2}{|OP|},$$

$$\therefore \quad |OP'| = \frac{r^2}{|OE|}\sec\theta.$$

特别设$E$的反演点是$E'$，$|OE'| = \frac{r^2}{|OE|}$，所以$|OP'|\cos\theta = |OE'|$，因此$\angle OE'P'$是直角，即$P'$在射线$OBEE'$的垂线上，其垂足是$E'$. 这就得出圆$K$的反演是直线$P'E'$.

(6) 在反演变换下，不过$O$点的直线变为过$O$点的圆，过$O$点的直线仍变为过$O$点的直线.

由反演变换的性质(2)、(5)就得出前一结论；后一结论直接可从定义中看出.

(7) 在反演变换下，不过$O$点的圆变为不过$O$点的圆.

设$K$为已给的不过$O$点的圆，选取坐标，使$O$为原点，$x$轴过$K$的圆心$(a,0)$，在$K$上的点$P(x,y)$满足方程

$$(x-a)^2+y^2=b^2 \quad \text{或} \quad x^2+y^2-2ax=b^2-a^2 \quad (b\neq a)$$

这里$b$是$K$的半径. 设$P'$是$P$的反演点，$(x',y')$是$P'$点的坐标，$(x',y')$和$(x,y)$在过$O$的同一射线上，所以

$$x'=\lambda x,\quad y'=\lambda y \quad (a>0)$$

因为$|OP|=\sqrt{x^2+y^2}$，$|OP'|=\sqrt{x'^2+y'^2}=\lambda\sqrt{x^2+y^2}$.

利用$|OP|\cdot|OP'|=r^2$

可得

$$\lambda(x^2+y^2)=r^2$$

所以

$$x'=\frac{r^2x}{x^2+y^2},\quad y'=\frac{r^2y}{x^2+y^2}$$

成立，或者

$$x=\frac{r^2x'}{x'^2+y'^2},\quad y=\frac{r^2y'}{x'^2+y'^2},$$

代入$(x,y)$所满足的方程，就得出$P'(x',y')$所满足的方程

$$(b^2-a^2)(x'^2+y'^2)+2ar^2x'=r^4.$$

当$b^2-a^2\neq 0$时，可变形为

$$x'^2+y'^2+\frac{2ar^2}{b^2-a^2}x'=\frac{r^4}{b^2-a^2},$$

它的轨迹确是一个圆.

这件事也可以有另外的证明(不用解析几何).

设$O$点在圆$K$外，从$O$点出发的一条射线和圆$K$交于点$P_1$, $P_2$(图 6).

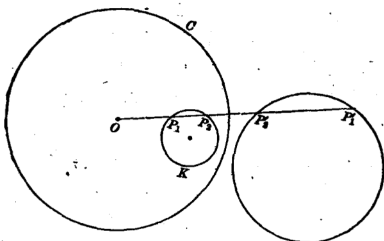



图 6

由平面几何中圆的切割线定理可得，$|OP_1|\cdot|OP_2|=k_1^2$. 这里$k_1$是一个常数，是$O$到圆$K$的切线的长度. 设$P'_1$和$P'_2$是$P_1$和$P_2$的反演点，根据反演公式$|OP|\cdot|OP'|=r^2$得

$$|OP'_1|=\frac{r^2}{|OP_1|},\ |OP'_2|=\frac{r^2}{|OP_2|},$$

所以

$$|OP'_1|\cdot|OP'_2|=\frac{r^4}{k_1^2}=\text{常数},$$

由此可见$P'_1$, $P'_2$也在一个圆上. 如果$O$点在$K$内，证法也类似.

利用反演，可以把平面几何中有关圆和直线的某些定理转化为只是和圆有关但复杂得多的定理. 例如，设平面

上有三个圆 $K_1$, $K_2$, $K_3$, 它们两两相交, 记 $K_1$ 和 $K_2$ 的交点为 $A$、$B$; $K_2$ 和 $K_3$ 的交点为 $C$、$D$; $K_3$ 和 $K_1$ 的交点为 $E$、$F$, 成立如下的事实: 直线 $AB$, $CD$, $EF$ 交于一点(图 7).

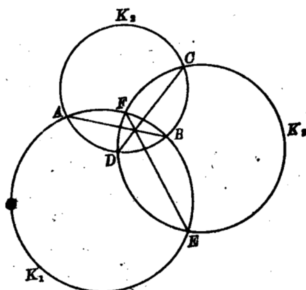


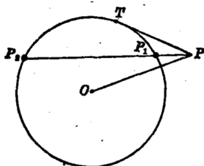

图 7

在证明这个事实之前, 先引入一点关于圆的幂的概念. 设 $P$ 为任意一点, $K$ 为以 $O$ 为圆心的任意一圆, $R$ 为它的半径, $|OP|^2-R^2$ 称为点 $P$ 关于圆 $O$ 的幂. 可以证明: 若 $l$ 是过 $P$ 的一条直线, 和圆交于两点 $P_1$, $P_2$, 那么 $P$ 关于圆 K 的幂就等于 $|PP_1|\cdot|PP_2|$ ($P$ 在圆外的情形, 如图 8(1) 所示); 或者等于 $-|PP_1|\cdot|PP_2|$ ($P$ 在圆内的情形, 如图 8(2) 所示). 事实上, $P$ 点在圆外时, $|OP|^2-R^2=|PT|^2$, 这里 $PT$ 是过 $P$ 点的圆 $K$ 的切线. 如所熟知, $|PT|^2=|PP_1|\cdot|PP_2|$. 当 $P$ 点在圆内时, 作过 $P$ 点的直径, 和圆周交于

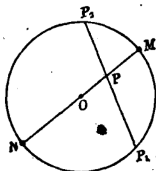
$M, N$ 两点，这时

$$|PP_1|\cdot|PP_2|=|PM|\cdot|PN|$$
$$=(R+|OP|)\cdot(R-|OP|)$$
$$=R^2-|OP|^2,$$

所以 $P$ 点关于圆 $K$ 的幂就是 $-|PP_1|\cdot|PP_2|$.




(1)




(2)

图 8

现在回到上面的定理的证明：圆 $K_1$、$K_2$ 相交于 $A$、$B$ 两点，直线 $AB$ 上的任意一点 $Q$ 关于 $K_1$、$K_2$ 的幂等于 $\pm|QA|\cdot|QB|$. 当点 $Q$ 在两圆之内时（即在线段 $AB$ 上）取负号，否则取正号. 所以直线 $AB$ 上的点关于圆 $K_1$、$K_2$ 上的幂是相等的. 另一方面，如果点 $Q$ 不在 $AB$ 上（读者可以自行证明，比如说用解析几何的方法）点 $Q$ 关于 $K_1$、$K_2$ 的幂一定不相等，所以直线 $AB$ 是关于 $K_1$、$K_2$ 的幂相等的点的轨迹. 同样，直线 $CD$ 是关于 $K_2$、$K_3$ 的幂相等的点的轨迹，直线 $EF$ 是关于 $K_3$、$K_1$ 的幂相等的点的轨迹. 记 $AB$

和 $CD$ 的交点为 $S$，点 $S$ 关于 $K_3$、$K_1$ 的幂必相等，所以 $S$ 也必定在 $EF$ 上，证明完毕.

利用反演的思想，我们可以得到一个复杂得多的定理. 设 $K_1$、$K_2$、$K_3$ 是三个两两相交的圆，交点分别为 $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$. $W$ 为不在 $K_1$、$K_2$、$K_3$ 上的一点，作过 $W$、$A$、$B$ 的圆 $L_1$，过 $W$、$C$、$D$ 的圆 $L_2$，过 $W$、$E$、$F$ 的圆 $L_3$，那么 $L_1$、$L_2$、$L_3$ 交于一点 $U$（图 9）. 这个定理，直接证明困难较大，但可以用下面的方法来证明. 以 $W$ 为中心作一个圆，关于这个圆作反演，圆 $K_1$、$K_2$、$K_3$ 变成圆 $K'_1$、$K'_2$、$K'_3$，它们两两相交，交点分别为 $A'$、$B'$、$C'$、$D'$、$E'$ 和 $F'$. 圆 $L_1$ 变

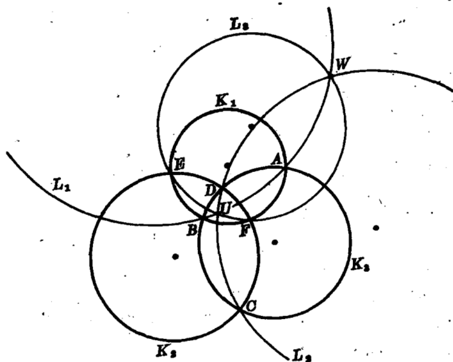



图 9

为直线 $A'B'$，圆 $L_2$ 变为直线 $C'D'$，圆 $L_3$ 变为直线 $EF''$，而根据前面的证明，可知直线 $A'B'$，$C'D'$，$E'F'$ 有一个公共点 $U'$，这就证明原来的三个圆 $L_1$、$L_2$、$L_3$ 也有一个公共点 $U$，它以 $U'$ 为反演点．定理证毕．

所以，根据反演变换的需要，可以设想平面上有而且只有一个无限远点，直线可以看成是过无限远点的圆，从许多平面几何的定理出发，可以立即得出许多形式上更为复杂的定理，上面所举的只不过是一个例子罢了．

如果用复数 $z=x+yi$ 表示平面上的点，圆 $C$ 取为以原点为圆心的单位圆，那么以 $z(z\neq 0)$ 为复坐标的点 $P$ 的反演点 $P'$ 的坐标就是

$$z'=\frac{1}{\bar{z}}=\frac{1}{x-yi}=\frac{x+yi}{x^2+y^2}.$$

在平面的复数表示时，往往也引入一个无限远点，它相应于 $z\to\infty$，这里 $z\to\infty$ 的意义是 $z$ 的模 $\sqrt{x^2+y^2}$ 趋向于 $+\infty$。

# 十二、几何学中对无限的另一构思

欧几里得几何学的平行公理实质上是我们对于无限的一种假想．在一个有限的平面区域，例如一块黑板上，过直线外一点可以作许多直线和一条已知的直线不相交，因为我们是局限在这块黑板之内讲相交和不相交的．如果把黑板放大，把直线延长，有些原来不相交的直线变成相交的了，但总还有些直线是不相交的（图 10）．于是人们就可以设想，我们如果把黑板不断地扩大，不相交的直线不断地减少，并且假想在黑板扩大成为无限的平面时，不相交的直线就减少到唯一的一条，这就是欧氏几何学中的平行公理．

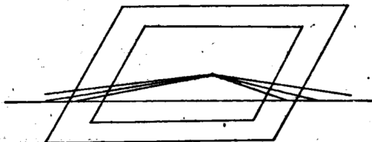


图 10

有趣的是，这种对无限的想象可以在有限处得到许多重要的结论，例如三角形三内角之和等于一平角，就是利用这条平行公理得到证明的. 正因为如此，人们在一个长时期内把平行公理看成是几何学的绝对不能动摇的基础. 数学家们只是千方百计地想用其他公理来证明它而已!

这种努力延续了二千年，一直到十九世纪初，三位数学家，德国的高斯(Gauss)，匈牙利的波约(Bolyai)和俄罗斯的罗巴切夫斯基 (Lobachevskii) 独立地发现：要用欧氏几何的其他公理来证明平行公理，这是不可能做到的. 如果设想，上面所讲的黑板不断扩大，过一点和一条已给直线不相交的直线虽然不断在减少(始终保持有无限条)，但当黑板扩张至无限时，仍然会有两条(以致于无限条)直线和已给的直线不相交. 他们认为，这也未必是不合理的. 罗巴切夫斯基用"平面上过已给直线外一点，至少可作两条直线和这条已给直线不相交."这一公理来代替欧氏平行公理，从而可以建立一套新的几何学，后来称为非欧几何学(其中的一种)，或称罗氏几何学.

用罗氏的"平行公理"，能够推出一些熟悉欧氏几何的人所不能相信的结论. 这种几何学说，三角形三内角之和小于一平角，其差和三角形的面积成正比，相似而不全等的三角形是不可能的，两个三角形如果三内角相等就会是全等的三角形，……对于无限作了不同于欧氏几何的想象，在有限处也导致了许多另外的结论.

如何评价这些结论，可以从两个方面来看.

一个方面是：这样的几何学和我们的经验是否相符？这个问题的回答其实很不简单．对于广阔无垠的宇宙来说，我们所能绘制和能够测量的三角形又是何等的渺小．这样，即使测试了很多三角形，其三内角和总是和平角相差极小，也不能说罗氏几何就一定不行．特别是在罗氏几何中，三角形三内角和同平角之差除以三角形的面积，是一个常数，称为空间的曲率．如果这曲率的绝对值非常小，它和欧氏几何实质上并无太大区别（再加测量还有误差）．所以靠测量只能说在我们日常生活范围内，欧氏几何是相当好，罗氏几何也不见得不对．当然欧氏几何更容易一些，方便一些，人们认为采用欧氏几何更好．

另一方面是，非欧几何学本身是否是相互矛盾的？一个理论如果自相矛盾，那显然是无法立足的．罗巴切夫斯基等对于自己的理论有一定的信心，他们已把理论发展到足够完善的程度而没有发现什么矛盾．当然，这还是不够的．直到十九世纪中期，才有几位数学家从不同的角度和用不同的方法，在欧氏几何的基础上，作出非欧几何的理论，从而使人们相信，如果欧氏几何本身是一个无矛盾的理论体系，那么非欧几何本身也不会有矛盾．

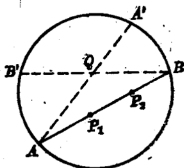


图 11

我们现在简明地介绍德国数学家克莱因（Klein）的一种做法：在欧氏平面上选取一个圆（图11），对于在圆内的任意两点 $P_1$、

$P_2$，作直线 $P_1P_2$，它交圆周于两点 $A$、$B$，定义

$$(A,B;P_1,P_2)=\frac{|BP_2|}{|BP_1|}:\frac{|AP_2|}{|AP_1|}=\frac{|BP_2|\cdot|AP_1|}{|AP_2|\cdot|BP_1|},$$

又改变原来欧氏平面上两点距离的定义，作 $P_1$、$P_2$ 点的距离

$$d(P_1,P_2)=k|\ln(A,B;P_1,P_2)|.\ （k\text{ 为正常数}）$$

克莱因的做法是：

(i) 规定单位圆内部的点为"非欧平面"；

(ii) 规定 $d(P_1,P_2)$作为两点的距离；

(iii) 单位圆的弦（除去两个端点）规定作非欧平面上的直线，这样，就可利用欧氏几何的种种定理，证明出在这个"非欧平面"上能够实现罗氏几何．我们看一看当 $P_2$ 和 $B$(或 $A$)接近时的情形，当 $P_2$ 接近 $B$(或 $A$)时$|P_2B|$(或$|AP_2|$)趋向于 0，若$P_1$不动，那么$d(P_1,P_2)$能无限增大，所以直线的长度是无限的．又令$Q$是单位圆内直线 $P_1P_2$ 外的一点，$AQA'$，$BQB'$ ($A$、$B$、$A'$、$B'$ 是单位圆上的点，不算是罗氏平面的点)，就是两条和直线 $P_1P_2$ 不相交的非欧平面上的直线，这样，罗氏公理成立．当然，过$Q$点还有无限多条和 $P_1P_2$ 不相交的直线．不过大家要注意，我们所说的直线实际上都是单位圆的弦，并且两个端点已经除去．在罗氏几何学中，在每一直线上也可引入无限远点，图 9 中 $A$、$B$、$A'$、$B'$……等点，即单位圆上的点都可以看成无限远点，不过这时一条直线上有两个无限远点，每一个方向有一个．

可以用很严格的方法来证明罗氏几何所有的公理在这个欧氏平面中"人为地"构造起来的罗氏平面都能够成立. 这样就回答了所提出的第二个问题, 即若欧氏几何没有矛盾, 那么罗氏几何也没有矛盾.

非欧几何的出现, 是人类对空间概念的一大变革, 人们进一步认识到现实空间不只可能是欧氏的, 也有可能是非欧的. 几何学中值得研究的空间不仅仅是欧氏空间, 也有多种更为复杂的空间. 非欧几何的出现, 不仅对整个数学有重大的影响, 而且对于物理学的变革也起了重大的作用.

# 十三、素朴的集合的概念

集合的概念，并不仅仅从数学中产生，它的素朴的意义是：有某一性质的事物的全体.

这里所说的事物的范围很广，可以是具体的书本，铅笔，橡皮，人，狗等等，也可以是抽象的数，定理，三角形，直线等等，在数学中喜欢称它们为元素.

"有某一性质"，这句话要做如下要求：任何一个事物要么具有这个性质，要么不具有这个性质，这就是说，这里所说的具有或不具有这个性质是很明确的，没有含糊之处.

全体这两个字也很重要，它表示集合应该包括具有所说性质的一切元素，而不能有所遗漏.

举例来说，在没有人进进出出的情况下，在一个房间里人的全体；不大于5的正整数全体；一本词典里出现的词条的全体；三国演义中出现人物的名字的全体等等都是集合.

数学家发现，用集合的概念来表述数学的研究对象及

其性质，是非常合适的，因为数学往往要求它的对象有非常明确的性质，同时它所研究的往往是某一类的对象的全体所共有的性质，例如有理数的集合，无理数的集合，射影平面上无限远点的集合，一个多项式的零点的集合，素数的集合等等.

设$\Sigma$是一个集合，$a$是$\Sigma$中的一个元素，我们称$a$属于$\Sigma$，记为$a\in\Sigma$.

我们说明一下有关的定义：

空集——不包含任何元素的集合称为空集，记作$\varnothing$. 例如一个房间里空无一人时，这房间的人的集合就是空集，满足$\sin x=2$的实数$x$所成的集合是空集等等. 要证明具有某一性质的事物所组成的集合是空集或不是空集有时是相当不容易的. 例如代数的基本定理就是要证明一个多项式(非常数)的根(可能是复根)的集合不是空集.

和集——设$\Sigma_1$、$\Sigma_2$是两个集合，$\Sigma_1$和$\Sigma_2$的和集是指属于$\Sigma_1$或属于$\Sigma_2$的元素的全体所成的集合，记作$\Sigma_1\cup\Sigma_2$. $\Sigma_1$和$\Sigma_2$可以没有公共的元素，也可以有公共的元素. 例如$\Sigma_1$是偶数的集合，$\Sigma_2$是奇数的集合，$\Sigma_1\cup\Sigma^2$就是整数的集合，这时$\Sigma_1$和$\Sigma_2$没有公共的元素. 如果$\Sigma_1$是奇数的集合，$\Sigma_2$是能被3整除的数的集合，$\Sigma_1$和$\Sigma_2$就有公共元素，例如3, 9, 15, ……等等，在$\Sigma_1\cup\Sigma_2$中这些数仍只算一次出现.

交集——设$\Sigma_1$和$\Sigma_2$是两个集合，它们的公共元素组成的集合称为交集，记作$\Sigma_1\cap\Sigma_2$. 例如偶数集和奇数

集所成的交集为空集；素数集和偶数集所成的交集为由一个元素 2 所成的集合，但不应理解为 2 本身，因为集合和元素是两种不同的概念。

子集——一个集合中的部份元素所成的集合称为子集。换句话说，如果 $\Sigma_1$ 是一个集合，$\Sigma_2$ 是一个集合，$\Sigma_2$ 的任一元素都是 $\Sigma_1$ 中的元素，则称 $\Sigma_2$ 是 $\Sigma_1$ 的子集，记为 $\Sigma_2 \subset \Sigma_1$。特例，一个集合是其自身的子集。如果 $\Sigma_1$ 中确有不属于 $\Sigma_2$ 的元素，则称 $\Sigma_2$ 是 $\Sigma_1$ 的真子集。

余集——设 $\Sigma_1$ 是一个集合，$\Sigma_2$ 是其子集，$\Sigma_1$ 中不属于 $\Sigma_2$ 中的元素所组成的集合称为 $\Sigma_2$ 在 $\Sigma_1$ 中的余集。例如偶数集在整数集中的余集就是奇数集。把平面作为一个点集，一圆 $C$ 内部的点组成一个真子集，其余集就是圆外的点和圆周上的点所成的集合。

常用{ }表示集合，在可能情况下，{ }中写上它的元素，以确定一个集合。例如$\{1, 2, 3\}$，$\{a, b, c, d\}$等等。

# 十四、无限集的特征

由有限个元素所组成的集合称为有限集.

对一个有限集来说，它的元素的个数是最基本的数学量，称为它的基数．原则上，基数是可以由数元素的数目而得到，例如集合$\{a, b, c, d\}$的基数是4，一个正常人的一双手指的集合的基数是10等等．空集的基数是0.

两个有限集合的基数大小，即元素数目的多少，可以用如下的方法来比较：例如有一群人和一堆衣服，要每个人拿一件衣服，到最后，如果衣服拿光了，还有人没有拿到衣服，那么人的数目多于衣服的数目；相反地，如果每人都拿到衣服，还有衣服剩下来，那末衣服的数目就多于人的数目；如果每人都拿到衣服，衣服又被拿光，那么二者的数目就相等．我们还注意到，不管人们怎样挑衣服，只要一人只能拿一件，衣多于人或人多于衣或人的数目和衣的数目相等这三种情形总是不会改变的.

为什么要讲这种很简单的常识呢？因为对于无限集来说，这将是一个很有启发性的对比.

在数学中常常会遇到无限集，什么叫无限集，我们不妨作这样的理解．设$\Sigma$是一个集合，假如对于任何一个大的整数N，都有$\Sigma$的一个子集，它的基数超过N，那么$\Sigma$就是一个无限集．这意味着，我们去数$\Sigma$的元素，无论数到怎样大的数，总还有元素没有数到．

怎样比较两个无限集的元素多少呢？我们不妨采取以前的一一配对（一对一的对应）的办法．还是用例子来说明：假想有一个旅馆，它有无限个房间（这当然是假想的），而且



都已住满人（这也是假想的），而且每个房间都只能住一个旅客．这样，我们可以认为旅客和房间是一样多的，忽然又来了一位客人，看来是无法安排了，旅馆经理却有办法，他让一号房的旅客搬到二号房去，二号房旅客搬到三号房去，……第$n$号房的旅客搬到第$n+1$号去，……这样，每位旅客都有了安排，而第一号房间却空出来了．那位后来的旅客居然也有了住房．即使一下来了许多位（$k$位）旅客，这位经理还是有办法，他让原住一号的旅客搬到$(k+1)$号去，2号旅客搬到$(k+2)$去，……于是1到$k$号房间就空出来了．

不仅如此，假想突然到了无限位旅客，他们每人都有一个编号，这编号从1, 2, 3, ……$n$…… 一直下去而不会终止．这时经理还是有办法：他让原位一号房的旅客住到二号房去，二号房的旅客住到四号房去，三号房的旅客住到六号房去，四号房的旅客住到八号房去，五号房的旅客住到十号房去，……$n$ 号房的旅客住到 $2n$ 号房去，……这样，原来的旅客又人人有了安排，而奇数号的房间都空出来了，于是他让新来的1号旅客住一号房，2号旅客住三号房，3号旅客住五号房，……第 $n$ 号旅客住第$(2n-1)$号房，……旅客都安排好了，而且仍然是一人一个房间．这样一来，增加了这么多旅客以后，旅客的数目岂不是仍然和房间数目一样多了吗？

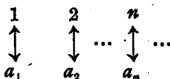
看起来这是一种诡辩，其实不然，它反映了无限集的一种特性．我们看一个最简单的无限集，即正整数所成的无限集，它的元素可表示为

$$\{1, 2, 3\cdots, n, \cdots\},$$

我们在"数"无限集时，总能数出1号元素 $a_1$，2号元素 $a_2$，……，$n$ 号元素$a_n$，……，所以任一无限集中总能够包含一个子集

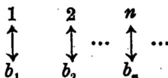
$$\{a_1, a_2, \cdots a_n, \cdots\}$$

是无限集，而且已和 $\{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$ 这个集合建立起一对一的对应．

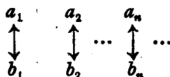


我说：凡能够和 $1,2,\cdots,n,\cdots$ 建立一对一对应的集合（一定是无限集）就称为可数集（或称可列集），这里可数（列）二字并不是真正的可数（列），而是依某种方法去数(列)，其中任何元素都会数(列)到. 上面的说明表示了这样的事实：任何一个无限集必然有一个可数(列)的子集.

假设有两个可数集 $\sum_1$ 和 $\sum_2$，$\sum_1$ 可记成 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$ 有上面所示的对应. 对 $\sum_2$，也可以作对应

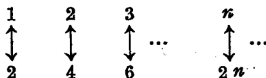


所以存在对应



$\sum_1$ 和 $\sum_2$ 的元素之间有一个一对一的对应，所以每两个可数集之间总存在着元素间的一对一的对应.

特别，偶数集 $\{2,4,6,8,\cdots 2n,\cdots\}$ 是一个无限集，因而它可以和 $\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$ 建立一对一的对应



然而偶数集是整数集的真子集. 所以可数集又能够和它的真子集建立一对一的对应. 这里所说的对应实质上就是那位旅馆经理的妙计：把 1 号旅客住到 2 号去，把 2 号旅客

住到 4 号去，……而把 1, 3, 5, ……号房全部空出来让给新来的客人.

所以可数无限集具有一个不容易想到的性质：它可以和它的一个真子集建立起一对一的对应.

不仅可数无限集，而且是任何无限集都有这个性质. 上面已经说过任一无限集$\Sigma$必有一个可数子集，所以我们可以把 $\Sigma$ 表示为 $\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2$，这里 $\Sigma_1$ 是一个可数集，记为

$$\Sigma_1=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\cdots\}.$$

$\Sigma_2$ 是$\Sigma_1$ 在$\Sigma$中的余集，它可以是空集，可以是有限集，也可以是无限集，但 $\Sigma_2$ 和 $\Sigma_1$ 没有公共的元素，我们作 $\Sigma$到自身的一个一对一的对应：对$\Sigma_1$ 的元素来说，对应关系是

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & & a_n & \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \cdots & \updownarrow & \cdots \\ a_2 & a_4 & a_6 & & a_{2n} & \end{array}$$

对 $\Sigma_2$ 的每一元素来说，把它们对应于自己，如果记

$$\Sigma'=\{a_2, a_4, a_6\cdots\}\cup\Sigma_2,$$

即作$\{a_2, a_4, a_6\cdots\}$和 $\Sigma_2$ 的和集 $\Sigma'$，它一定是$\Sigma$ 的真子集，因为 $a_1, a_3, \cdots$等元素属于 $\Sigma$ 而不属于 $\Sigma'$，但上面所说的那种对应却把 $\Sigma$ 一一对应到 $\Sigma'$ 去.

对于有限集来说，这当然是不可能的.

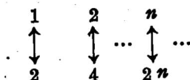
所以，我们就得出了无限集的一个特征，也就是和有限集相区别的一个根本性质：无限集的特征是存在着一个真子集和它建立一对一的对应.

# 十五、如何比较无限集的大小

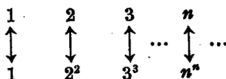
前面已经说过，有限集的大小(即包含元素的多少)是由它的基数来表示的，基数就是它的元素的个数．元素多，基数就大，元素少，基数就小，一个有限集的基数总比它的真子集的基数大(因为真子集的元素少了)，所以形成了"全体大于部分"这一观念．

对于无限集，那情况就完全不同了，即使是最简单的可数集，它已经可以和它的真子集建立起一一对应关系．在这里谈论元素的多少已变得含糊不清了，这样，人们就用"势"这个概念来说明两个无限集所含的元素的多少的关系，而避免用一集合的元素多于另一集合的元素这种说法．

有两个无限集 $\Sigma_1$、$\Sigma_2$，如果存在一个 $\Sigma_1$ 和 $\Sigma_2$ 的元素之间的一对一对应，那么就称它们是等势的．这里的着重点是"存在一个"，只要有一个就可以了．根据这个定义，正整数的集合和正偶数的集合存在着一对一的对应关系



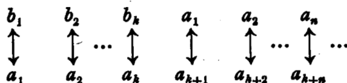
所以它们是等势的．不仅如此，我们可以取元素比正整数集减少得很多很多的子集合，如$\{1, 2^2, 3^3, \cdots, n^n, \cdots\}$，它也能和整数集建立起一一对应



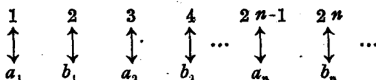
实际上，一切可数集都是等势的．这在上面一节已经说过了．

既然可数集都相互等势，那么有没有和可数集不能等势的无限集呢？

我们先从一个可数集$\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots\}$出发，把它添上有限个元素 $b_1, b_2, \cdots, b_K$（它们和 $a_1, \cdots a_n \cdots$ 都不相同）其结果仍然是可数集，这只要看下面的对应图就可以了．



这就是那个旅馆经理安排新来的 $k$ 个客人的花招．那么两个可数集的和集是怎样一种情形呢？设 $\sum_1=\{a_1, a_2, \cdots a_n \cdots\}$ $\sum_2=\{b_1, b_2, \cdots b_n, \cdots\}$是两个可数集，没有公共的元素，$\sum_1 \cup \sum_2$ 也一定是可数集，这只要有下列的对应图就可以了．



因为整数的全体可以看成是非负整数集和负整数集这两个可数集的和集，所以整数的全体是可数集.

有限个可数集的和集显然也是可数集，这可以用归纳法来证明，两个可数集的和集是可数集，假设$(k-1)$个可数集的和集是可数集，那么再和一个可数集作和集，其结果也仍然是一个可数集.

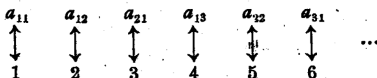
我们试作(可数)无限个可数集的和集，这种集和它们的元素如下表所列

$$
\begin{array}{lllllll}
\Sigma_1: & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & \cdots \\
\Sigma_2: & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & \cdots \\
\Sigma_3: & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\
\Sigma_n: & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & &
\end{array}
$$

这里的各个元素 $a_{ij}$ 没有两个元素是相同的，和集

$$\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2\cup\Sigma_3\cdots\cup\Sigma_n\cdots$$

是由所有这些 $a_{ij}$ 组成的，我们说这仍然是可数集. 因为我们可以作如下的对应图：




也就是说依上表中虚线箭头所示方向从最左边的虚线开始来排列 $\sum$ 的元素，就能使 $\sum$ 的元素和$\{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$建立一一对应，所以 $\sum$ 就是可数集．这个事实也可推出对一对有次序的正整数$(p, q)$所成的集合 $\sum'=\{(p, q)\}$($p$, $q$ 是正整数)构成一个可数集．取这个集合的一个子集 $\sum''$，它是由 $p$, $q$ 为互素的正整数对$(p, q)$所组成，$\sum''$ 也是可数的．把原来的对应图中 $p, q$ 不是互素的都保留下来，遇到 $p$, $q$ 是互素的就拿掉，把排在后面的整数对全部往前移一格，这样就可以得出 $\sum''$ 和$\{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$的一一对应．由于一个正有理数总可以表示为$\dfrac{p}{q}$的形式，这里 $p$, $q$ 是互素的正整数，所以正有理数的全体是可数的，添上 0 和负有理数的全体，所得的集合——有理数集也是可数的．

这里我们又看到一个令人惊异的结果：有理数的数目已是非常的多了，任何两个非常邻近的有理数之间，总还有无限个有理数，但它仍然是可数集．

那么是否有不可数的无限集呢？它是存在的，我们可借助于无理数做一个例子．

我们考察大于等于 0 而小于 1 的实数的全体，我们把这种实数都写成小数的形式 $0.a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots$，这里 $a_1$, $a_2, \cdots, a_n, \cdots$取 $0, 1, 2, \cdots, 9$ 中的任何一个．但我们将不允

许如，$0.1239\cdots9\cdots$，$0.247399\cdots9\cdots$这种形式的无限小数出现，因为如果一个无限小数某一位之后都是 9，那么它就等于把这些 9 都去掉而在前一位加上 1 所得的有限小数，例如 $0.1239\cdots9\cdots=0.12340\cdots0\cdots=0.1234$ 等等．作了这样的规定后，每个不小于 0 又小于 1 的实数都有唯一的表示方式．我们说这样的实数全体所组成的集合（记为$[0,1)$）是不可数的，用反证法证明，即假定它们是可数的，然后引出矛盾．

现假设$[0,1)$是一个可数的集合，那么就可以把它们的元素排成

$$\alpha^{(1)}=0.a_1^{(1)}a_2^{(1)}a_3^{(1)}\cdots a_n^{(1)}\cdots$$

$$\alpha^{(2)}=0.a_1^{(2)}a_2^{(2)}a_3^{(2)}\cdots a_n^{(2)}\cdots$$

$$\alpha^{(3)}=0.a_1^{(3)}a_2^{(3)}a_3^{(3)}\cdots a_n^{(3)}\cdots$$

并且$[0,1)$中的每一个元素都会在其中出现．

我们作$[0,1)$中的一个实数

$$\alpha=0.a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots$$

这里

$$a_1=\begin{cases}a_1^{(1)}-1, & \text{如果 } a_1^{(1)}\neq0,\\ a_1^{(1)}+1, & \text{如果 } a_1^{(1)}=0;\end{cases}$$

$$a_2=\begin{cases}a_2^{(2)}-1, & \text{如果 } a_2^{(2)}\neq0,\\ a_2^{(2)}+1, & \text{如果 } a_2^{(2)}=0;\end{cases}$$

……

一般地说

$$a_n=\begin{cases}a_n^{(n)}-1, & 如果\ a_n^{(n)}\neq 0,\\ a_n^{(n)}+1, & 如果\ a_n^{(n)}=0;\end{cases}$$

......

这样作出来的$\alpha$的确是实数，因为 $a_1, a_2, \cdots a_n, \cdots$都是$0, 1, 2, \cdots 9$, 中的一个数，而且没有一个是 9，但是所作的 $\alpha$ 并不包含在 $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, $\alpha^{(3)}, \cdots$这个序列之中(因为它的第一位小数和 $\alpha^{(1)}$不同，所以不是 $\alpha^{(1)}$；第二位小数和 $\alpha^{(2)}$不同，所以不是 $\alpha^{(2)}, \cdots$)，这就和我们原来的假设相矛盾，从此得知，正整数集不能和实数集等势，我们说整数集的势比实数集的势低，或实数集的势比整数集的势高.

实数集是无限集，当然能够和它的一个真子集等势，例如作函数

$$y=\mathrm{tg}^{-1}x,$$

当 $x$ 取任一实数时，$y$ 的数值总取在$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$中，不同的 $x$ 取到不同的 $y$ 值，而且$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$中每一值都被取到，所以实数集和区间$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$等势. 再作

$$u=\frac{1}{\pi}\left(y+\frac{\pi}{2}\right),$$

它使$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$和区间$(0, 1)$建立起一一对应，所以全体实数和$0, 1$之间的实数也等势.

如果有两个集合 $S_1$ 和 $S_2$，如果 $S_1$ 和 $S_2$ 的一个子集等势(即能建立一一对应)，而 $S_1$ 不能和 $S_2$ 等势（即不能和 $S_2$ 本身建立一一对应)，那么就说 $S_2$ 的势高于 $S_1$ 的势．上面的事实说明实数集 $R$ 的势比可数集的势高．

是否还有比实数集更高的势呢？回答是一定存在的．其作法如下：作实数集 $R$ 的一切子集所成的集合 $F$．$F$ 的元素不是实数，而是实数所成的集合，$R$ 是实数所成的集合，所以 $R$ 是 $F$ 的元素，1 不是 $F$ 的元素，但以 1 为元素的集合 $\{1\}$ 却属于 $F$．其他如有理数的全体，整数的全体，素数的全体等等都是F 的元素．实数集R能够和 $F$ 的一个子集等势：对 $R$ 中每一实数 $a$，作一个由 $a$ 构成的集合 $\{a\}$，对应 $a\to\{a\}$ 是把实数集到 $F$ 的一个子集（由一个实数所组成的集合的全体)建立了等势关系，现在我们说 $R$ 和 $F$ 本身不能有等势的关系．这要用反证法来证明，即先假设 $F$ 和R有一一对应关系，而从中引出矛盾．现在就来作这个证明：假设这个集合和实数集等势，那么对于每个实数 $a$，就会对应于一个实数所成的集合 $\sum_a$，如果 $a_1$ 和 $a_2$ 是不同的实数，$\sum_{a_1}$ 和 $\sum_{a_2}$ 就是不同的子集，并且 $\sum_a$ 会无遗漏地取遍一切由实数所成的集合．但是，这个假定会导出矛盾的．为此，我们作实数的一个子集合 $\sum$ 如下：设 $a$ 是实数，如果 $a$ 是 $\sum_a$ 中的元素，那么我们就不把它取在 $\sum$ 中，如果 $a$ 不是 $\sum_a$ 中的元素，我们就把 $a$ 取在 $\sum$ 中，这样所作的 $\sum$ 当然是实数所成的一个集合，按照假定，必然有一个实数 $\beta$，使 $\sum$ 就是 $\sum_\beta$，现在问 $\beta$ 是否属于 $\sum_\beta$．如果 $\beta$ 属于

$\sum_\beta$, 那么 $\beta$ 就不会取在 $\sum=\sum_\beta$ 中，这是矛盾的，如果 $\beta$ 不属于 $\sum_\beta$，那么 $\beta$ 就应该被取在 $\sum=\sum_\beta$ 中，这又是矛盾的．所以无论 $\beta$ 是否在 $\sum_\beta$ 中，都会产生矛盾．因而我们的假定：实数集的一切子集合和实数集等势这个假定是不对的．这样我们就得到了一个势比实数集高的集合．

对这件事，我们可以作另外一个证明．设 $f(x)$ 是定义在 $R$ 上的函数，但对每个实数 $x$，它的函数值只能取 0 或 1．所有的这样的函数的集合记为 $G$，$G$ 包含很多元素，例如

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{如 } x \text{ 是有理数,}\\ 1, & \text{如 } x \text{ 是无理数.}\end{cases}$$

又如

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{如 } x\geqslant 0,\\ 1, & \text{如 } x<0.\end{cases}$$

等等．特别我们作

$$f_a(x)=\begin{cases}0, & x\neq a,\\ 1, & x=a.\end{cases}$$

那么 $f_a(x)$ 组成 $G$ 的一个子集 $G_1$，$a\longleftrightarrow f_a(x)$ 组成 $R$ 和 $G$ 的子集 $G_1$ 的一对一的对应．我们要证明 $G$ 不能和 $R$ 等势．这里也得用反证法．假设 $G$ 和 $R$ 等势，每一实数 $\alpha$ 对应 $G$ 中函数 $f^{(\alpha)}(x)$，且满足 $\alpha_1\neq\alpha_2$ 时，$f^{(\alpha_1)}(x)\neq f^{(\alpha_2)}(x)$，又 $f^{(\alpha)}(x)$ 取遍了 $G$ 中的一切函数，我们说这样会引出矛盾：作一函数 $h(x)\in G$，其方法如下，对任一 $a\in R$，

$$h(\alpha)=\begin{cases}0, & \text{如果 } f^{(\alpha)}(\alpha)=1,\\ 1, & \text{如果 } f^{(\alpha)}(\alpha)=0.\end{cases}$$

按照假定 $h(x)$ 必是某一 $f^{(\beta)}(x)$，但是按照 $h(x)$ 的作法，可以知道，如 $f^{(\beta)}(\beta)=0$，则 $h(\beta)=1$；如 $f^{(\beta)}(\beta)=1$，则 $h(\beta)=0$，所以 $h(x)$ 不会和任一 $f^{(\beta)}(x)$ 恒等. 所以这是矛盾的.

应该指出，这两个证明实质上是相同的. 因为对 $R$ 的任一子集 $\Sigma$，我们可以作如下的一个函数(取值为 0 或 1)

$$f_{\Sigma}(x)=\begin{cases}1, & x\in\Sigma,\\ 0, & x\overline{\in}\Sigma.\end{cases}$$

$f_{\Sigma}(x)$ 称为子集 $\Sigma$ 的特征函数，例如：若 $\Sigma$ 是空集，$f_{\Sigma}(x)$ 恒等于 0，若 $\Sigma$ 是实数的全体 $R$，则 $f_{\Sigma}(x)$ 恒等于 1；若 $\Sigma$ 是由一个元素 $a$ 组成，$f_{\Sigma}(x)$ 就只在 $x=a$ 处为 1，其余处为 0，若 $\Sigma$ 是无理数的全体，则 $f_{\Sigma}(x)$ 当 $x$ 是无理数时为 1，$x$ 为有理数时为 0；相反地，已给了一个定义在 $R$ 上的取值为 0 或 1 的函数 $f$，那么可以作实数集 $R$ 的一个子集 $\Sigma_f$，它是使 $f(x)=1$ 的那些实数 $x$ 的全体所组成. 所以作 $R$ 的子集和给出定义在 $R$ 上而取值为 0 或 1 的函数是实质上相同的事情. 读者可以自己想一下，前面的两个反证法中，作引出矛盾的子集合 $\Sigma$ 和作引出矛盾的函数 $h(x)$，也实质上是一回事.

另外一个值得注意的事是，我们不从实数的集合 $R$ 出

发，而是从任何一个无限集$S$出发，运用上面所说的方法作$S$的一切子集的集合$\{\Sigma\}$或作定义在$S$上取值为0或1的函数的全体，可以用同样的方法证明：必存在势比$S$高的无限集．因此，从可数无限集出发，我们可以一步一步做下去．逐次地得势越来越高的无限集，所以我们可以说，无限也可以根据势来划分层次，而且这个层次也是无限的．

到此为止，我们已对无限集和它的势作了一些很初步的说明．这些说明使我们了解到无限集合（即使不赋予其它的结构）也是相当复杂的．进一步的研究表明，素朴的集合论会带来某种难以摆脱的困境，于是，集合论本身，也和纯粹数学的其他分支一样，走上了公理化的道路，即人们为集合论制订了公理，而有关集合的种种性质都以这些公理作为推理的依据而展开．这是现代纯粹数学的一个重要的方法，但已超出了我们所要说的范围很远了，在本书中就不作介绍了．